Minimanual Compacto de

MATEMÁTICA

Ensino Médio

Teoria e Prática

Minimanual Compacto de

MATEMÁTICA

Ensino Médio

Teoria e Prática

Alessandra Bosquilha

Marlene Lima Pires Corrêa

Tânia Cristina Neto G. Viveiro

2ª Edição

EDITORA RIDEEL

EXPEDIENTE

Editor Responsável	**Italo Amadio**
Coordenadora de Produção Editorial	**Katia F. Amadio**
Assistente Editorial	**Edna Emiko Nomura**
Autoras	**Alessandra Bosquilha**
	Marlene Lima Pires Corrêa
	Tânia Cristina Neto G. Viveiro
Revisão	**Roberta Stracieri**
	Alessandra Biral
Projeto Gráfico e Diagramação	**EXATA Editoração**
Capa	**Antonio Carlos Ventura**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bosquilha, Alessandra
Minimanual compacto de matemática : teoria e prática : ensino médio / Alessandra Bosquilha, Marlene Lima Pires Corrêa, Tânia Cristina Neto G. Viveiro. -- 2. ed. rev. -- São Paulo : Rideel, 2003.

ISBN 85-339-0585-8

1. Matemática (Ensino médio) I. Corrêa, Marlene Lima Pires. II. Viveiro, Tânia Cristina Neto G. III. Título.

03-4656 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

© Copyright – todos os direitos reservados à:

EDITORA RIDEEL

Al. Afonso Schmidt, 879 – Santa Terezinha
Cep 02450-001 – São Paulo – SP
www.rideel.com.br – e-mail: sac@rideel.com.br

EDITORA AFILIADA

Proibida qualquer reprodução, seja mecânica ou eletrônica, total ou parcial, sem a permissão expressa do editor.

2 4 6 8 9 7 5 3 1

8 0 3

Prefácio

Em qualquer área de atuação que você se encontre, ela sempre estará presente: a matemática.

Seus conceitos são tão básicos, que até mesmo a música pode ser convertida em expressões matemáticas. É uma ciência tão universal, que todas as mensagens das sondas espaciais lançadas até hoje são enviadas em linguagem matemática.

Em vista disso, o aprendizado da matemática é imprescindível. Dessa maneira, levamos até você o *Minimanual Compacto de Matemática – Teoria e Prática*, ilustrado com inúmeros exemplos para tornar a aquisição desse conhecimento muito mais fácil e agradável.

Este manual traz o conteúdo do Ensino Médio, explicado de maneira contextualizada e interdisciplinar, em uma linguagem que procuramos tornar acessível, desde o estudo das funções, até a geometria e a trigonometria. Além disso, o *Minimanual Compacto de Matemática – Teoria e Prática* traz um capítulo especialmente dedicado à *Matemática Financeira* em que o leitor poderá tirar suas principais dúvidas sobre as transações comerciais e financeiras do mercado, e até mesmo compreender um pouco melhor nossa política econômica.

Há também no final deste livro um Encarte Colorido, especialmente desenvolvido para fornecer ao leitor algumas idéias do emprego da matemática em áreas cotidianas, desde a formação dos cristais, passando pela escala Richter e como a intensidade de terremotos pode ser mensurada usando uma ferramenta matemática, entre outras questões que indicarão o caminho para que você desenvolva seu senso crítico e estenda sua compreensão a respeito do mundo que o cerca.

E assim, caro leitor, esperamos que esta obra não só lhe seja útil no aprendizado da matemática, como também o faça gostar mais desta incrível ciência.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – Função do 1° grau 11
1. Função do 1° grau 11
2. Gráfico da função do 1° grau 14
3. Raiz ou zero da função do 1° grau 18
4. Estudo de sinal da função do 1° grau 20
5. Inequação do 1° grau 21
6. Inequações produto e quociente 22

CAPÍTULO 2 – Função do 2° grau 27
1. Raízes da função do 2° grau 29
2. Gráfico da função do 2° grau 32
3. Vértice da parábola – máximos e mínimos da função 35
4. Conjunto imagem 36
APLICAÇÃO PRÁTICA – Função da posição em relação ao tempo da MRUV 40
5. Estudo do sinal da função do 2° grau 40
6. Inequações do 2° grau 43
7. Inequações produto e quociente 45

CAPÍTULO 3 – Função Modular 50
1. Módulo de um número real 50
2. Gráfico da função modular 53
3. Equações modulares 55
4. Inequações modulares 57

CAPÍTULO 4 – Função Exponencial 62
1. Equação exponencial 63
2. Gráficos da função exponencial 65
Aplicação Prática – Tempo de desintegração radioativa 68
3. Inequação exponencial 69

CAPÍTULO 5 – Função Logarítmica 77
1. Logaritmo 78
2. Propriedades decorrentes da definição 79
3. Logaritmo decimal – característica e mantissa 81
4. Propriedades operatórias dos logaritmos 83
5. Mudança de base 84
Aplicação Prática – A escola de pH 85
6. Função logarítmica 86
7. Equações logarítmicas 88
8. Inequações logarítmicas 91

CAPÍTULO 6 – Funções Circulares – Trigonometria 97
1. Triângulo retângulo 98
2. Razões trigonométricas 98
3. Teorema de Pitágoras 101
4. Ângulos notáveis 102
5. Relações trigonométricas 105
6. Circunferência 108
7. Comprimento da circunferência 108
8. Arco de circunferência 110
9. Ciclo trigonométrico 113
10. Arcos côngruos 114
11. Seno 117
12. Cosseno 119
13. Relação fundamental da trigonometria 122
Aplicação Prática – A quadratura do círculo 123
14. Tangente 124
15. Cotangente, secante e cossecante 126
16. Relações derivadas 127
17. Equações e inequações trigonométricas 129
18. Transformações trigonométricas 135
19. Funções trigonométricas 137

CAPÍTULO 7 – Seqüências e Progressões 144
1. Lei de formação 144
2. Progressões Aritméticas 146

3. Fórmula do termo geral da P.A. 149
4. Soma dos termos de uma P.A. finita 151
5. Progressões Geométricas (P.G.) 153
6. Fórmula do termo geral de uma P.G. 156
7. Soma dos termos de uma P.G. finita 157
8. Soma dos termos da P.G. infinita 158

CAPÍTULO 8 – Matrizes e Determinantes 162
1. Definição 162
2. Tipo ou ordem de uma matriz 163
3. Representação genérica de uma matriz 163
4. Igualdade de matrizes 165
5. Operações com matrizes 166
6. Casos particulares 170
7. Determinantes 173

CAPÍTULO 9 – Sistemas Lineares 183
1. Definição 184
2. Equação linear 184
3. Solução de uma equação linear 184
4. Representação genérica de um sistema linear 186
5. Representação de um sistema linear por meio de matrizes 187
6. Sistema normal 189
7. Regra de Cramer 190
8. Classificação de um sistema linear 191
APLICAÇÃO PRÁTICA – Balanceamento de equações químicas 194

CAPÍTULO 10 – Análise Combinatória e Binômio de Newton 197
1. Princípio fundamental da contagem ou princípio multiplicativo 197
2. Fatorial 202
3. Tipos de agrupamento 206
4. Arranjos simples 206
5. Permutações simples 209
6. Combinações simples 210
7. Agrupamentos com repetição 213
8. Casos particulares de números binomiais 218
9. Números binomiais complementares 219
10. Números binomiais consecutivos 220
11. Propriedade dos números binomiais consecutivos (Relação de Stiffel) 221
12. Triângulo de Tartaglia-Pascal 222
13. Binômio de Newton 224
14. Fórmula do termo geral 226

CAPÍTULO 11 – Probabilidade e Estatística 229
1. Definição 229
2. Elementos da teoria das probabilidades 230
3. Experimento composto 231
4. Probabilidade de um evento 232
5. Probabilidade da união de eventos 235
6. Probabilidade de um evento complementar 236
7. Probabilidade da intersecção de eventos 237
8. Probabilidade condicional 238
9. Lei binominal das probabilidades 240
10. Estatística 242
11. Medidas de tendência central 244

CAPÍTULO 12 – Matemática Financeira 247
1. Porcentagem 247
2. Lucro e prejuízo 249
3. Descontos e acréscimos 251
4. Acréscimos e descontos sucessivos 253
5. Juro 256
6. Unidade de tempo 257
7. Montante 257
8. Juro simples 258
9. Juro composto 261
10. Aplicação ou capital à taxa variável 263
11. Inflação 264

CAPÍTULO 13 – Números Complexos 267
1. Definição 267
2. Conjunto dos números complexos 268
3. O número complexo 268
4. Casos especiais 268
5. As potências de *i* 272
6. Igualdade de números complexos 274
7. Conjugado de um número complexo 275
8. Operações com números complexos 276
9. Equações do 1° e 2° graus em $\mathbb{C}$ 278
10. Representação gráfica – plano de Argand-Gauss 280
11. Módulo de um número complexo 281
12. Argumento de um número complexo 283
13. Forma trigonométrica ou polar dos números complexos 285

CAPÍTULO 14 – Polinômios e Equações Polinomiais 287
1. Função polinomial 288
2. Grau do polinômio 289

3. Princípio de identidade de polinômios 290
4. Polinômio identicamente nulo 290
5. Valor numérico de um polinômio 291
6. Operações com polinômios 293
7. Método de Descartes 297
8. Equações polinomiais 299
9. Teorema fundamental da álgebra 299
10. Teorema da decomposição 299
11. Multiplicidade de uma raiz 301
12. Teorema das raízes complexas 302
13. Relações de Girard 304

CAPÍTULO 15 – Geometria Analítica 306
1. Definição 306
2. Sistema de coordenadas sobre uma reta 306
3. Distância entre dois pontos na reta real 307
4. Coordenadas cartesianas 308
5. Distância entre dois pontos de um plano 310
6. Ponto médio de um segmento 312
7. Baricentro 313
8. Condição de alinhamento de três pontos 315
9. Inclinação de uma reta 318
10. Coeficiente angular de uma reta 318
11. Equação da reta 321
12. Determinando a equação da reta 321
13. Equação reduzida da reta 323
14. Equação segmentaria da reta 325
15. Equação geral da reta 328
16. Posições relativas de duas retas 330
17. Intersecção de retas 333
18. Condição de perpendicularismo 334
19. Distância entre um ponto e uma reta 337
20. Definição de elipse 338
21. Equações da elipse 339
APLICAÇÃO PRÁTICA – Órbitas dos corpos celestes 341
22. Definição de circunferência 342
23. Equação reduzida da circunferência 342

Gabarito 347

Tabela Trigonométrica 362

Tabela de Logaritmos Decimais 364

Bibliografia 367

Siglas de vestibulares 367

Capítulo 1

Função do 1º Grau

Por volta de 2000 a.C., egípcios e babilônios já possuíam métodos para a resolução de equações do 1º grau. Entre os egípcios, destacou-se Diofanto de Alexandria, cuja principal obra, *Arithmetica*, procurava a generalização dos métodos a partir de problemas numéricos. Contudo, foi Fibonacci, influenciado pelas técnicas desenvolvidas pelos árabes, quem documentou soluções gerais para a resolução de equações do 1º grau, em sua obra *Liber Abacci*.

1. Função do 1º grau

As funções do 1º grau estão presentes em diversas situações do dia-a-dia. Vejamos este exemplo.

Uma loja de eletrodomésticos contrata vendedores com as seguintes condições salariais: um fixo de R$ 100,00 mais 5% sobre as vendas efetuadas.

Vamos procurar uma fórmula que forneça o salário no final de cada mês. Lembremos que: 5% = 0,05. Chamemos o total do salário de y. Se o vendedor fizer uma venda de R$ 500,00, receberá:

$$y = 100 + 0{,}05 \cdot 500 = \text{R\$ } 125{,}00$$

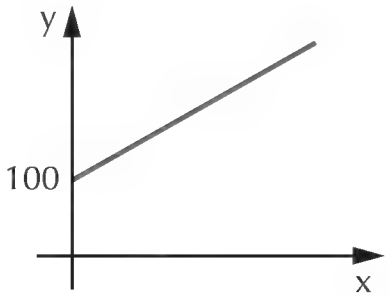
Façamos uma tabela para visualizar melhor a situação.

$$y = 100 + 0{,}05x$$

Salário fixo (em reais)	Venda (em reais)	%	Total (em reais)
100	500	5	125
100	1.000	5	150
100	2.000	5	200

De modo geral, se ele vender x, teremos que:

A fórmula $y = 100 + 0{,}05x$ expressa uma função do 1º grau. A representação gráfica de uma função deste tipo *sempre* será uma *reta:*

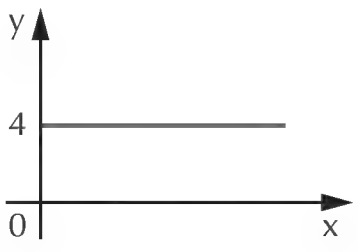


Definição:

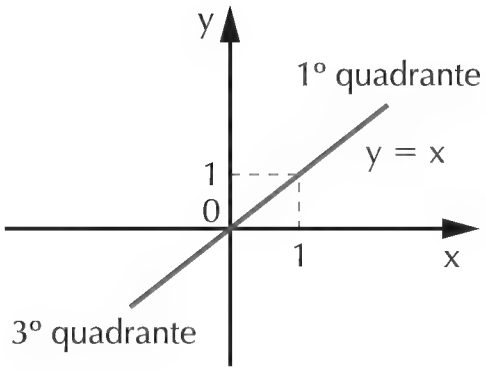
Chama-se *função do 1º grau* a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{y = ax + b}$, com *a* e *b* números reais e $a \neq 0$.
a é o *coeficiente angular da reta* e determina sua inclinação, *b* é *o coeficiente linear da reta* e determina a intersecção da reta com o eixo y.

A função do 1º grau pode ser classificada de acordo com seus gráficos. Considere sempre a forma genérica $y = ax + b$.

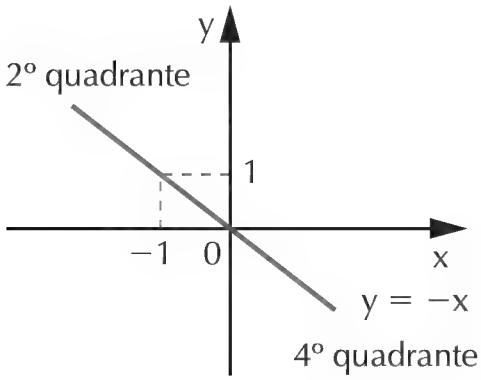
1.1 Função constante: se $a = 0$, então $y = b$, $b \in \mathbb{R}$. Desta maneira, $y = 4$ é função constante, pois, para qualquer valor de x, o valor de y ou f(x) será sempre 4.



1.2 Função identidade: se a = 1 e b = 0, então y = x. Nesta função, x e y têm sempre os mesmos valores. Graficamente temos:



A reta y = x ou f(x) = x é denominada *bissetriz dos quadrantes ímpares.*



Mas, se a = −1 e b = 0, temos então y = −x. A reta determinada por esta função é a *bissetriz dos quadrantes pares,* conforme mostra o gráfico ao lado.

x e y têm valores iguais em módulo, porém com sinais contrários.

1.3 Função linear: é a função do 1º grau quando b = 0, a ≠ 0 e a ≠ 1, a e b ∈ ℝ. Exemplos:

$f(x) = 5x;\ y = \frac{1}{2}x;\ f(x) = -2x;\ y = 10x$

1.4 Função afim: é a função do 1º grau quando a ≠ 0, b ≠ 0, a e b ∈ ℝ. Exemplos:

f(x) = 3x + 1; y = 4x − 2; f(x) = −x + 5

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Obtenha o valor de *m* ∈ ℝ para que a função seja do 1º grau, em cada caso:

a) f(x) = (*m* + 1)x + 3

Resolução: Pela definição, $f(x) = ax + b$ é função do 1º grau se a e b são reais e $a \neq 0$. No exercício, o coeficiente de x é $m + 1$, que deve, então, ser diferente de zero:

$$m + 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{m \neq -1}$$

b) $f(x) = (m^2 - 4)x + 5$

Resolução: O coeficiente de x é $m^2 - 4$, então:

$$m^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 4 \Rightarrow \boxed{m \neq \pm 2}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine, em cada caso, o valor de $k \in \mathbb{R}$ para que a função seja do 1º grau:

a) $f(x) = (3k + 6)x + 1$

b) $f(x) = (2k - 8)x + 7$

c) $y = (k^2 - 25)x - 2$

d) $y = (k^2 - 9)x^2 + 2x - 1$

e) $f(x) = -kx + \sqrt{2}$

f) $y = \left(\frac{2}{3}k - 4\right)$

2. Gráfico da função do 1º grau

A representação geométrica da função do 1º grau é uma reta, portanto, para determinar o gráfico, é necessário obter dois pontos. Em particular, procuraremos os pontos em que a reta corta os eixos x e y.

De modo geral, dada a função $f(x) = ax + b$, para determinarmos a intersecção da reta com os eixos, procedemos do seguinte modo:

1º) Igualamos y a zero, então $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$, no eixo x encontramos o ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

2º) Igualamos x a zero, então $f(x) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(x) = b$, no eixo y encontramos o ponto (0, b).

Além disso, temos que:

- f(x) é *crescente* se a é um número positivo ($a > 0$);
- f(x) é *decrescente* se a é um número negativo ($a < 0$).

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Esboce o gráfico das funções e determine se são crescentes ou decrescentes:

a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = -2x + 4$

Resolução:

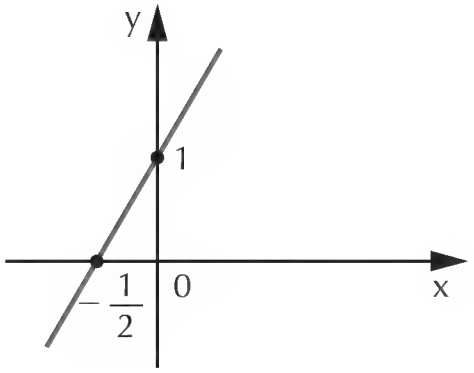
a) Para determinar o ponto sobre o eixo x fazemos o seguinte:

$0 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

De modo semelhante, para determinarmos o ponto sobre o eixo y:

$y = 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow y = 1$

Agora, com esses dois pontos, poderemos traçar o gráfico ao lado:



Como podemos observar pelo gráfico e sendo $a = 2 > 0$, a função é crescente.

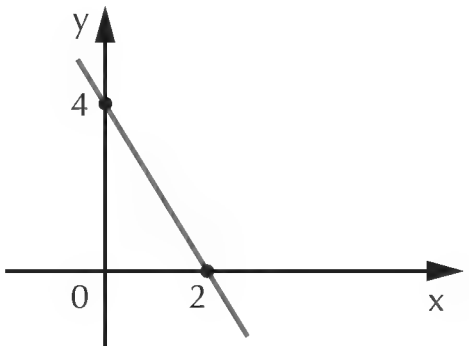
b) Usando o mesmo método para $f(x) = -2x + 4$, temos:

para $y = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$

para $x = 0 \Rightarrow y = -2 \cdot 0 + 4$

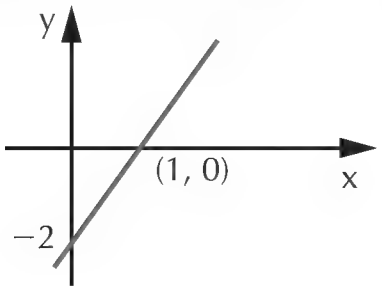
$y = 4$

O gráfico fica:



Com base no gráfico e porque $a = -2 < 0$, a função é decrescente.

Agora, vejamos como obter a expressão da função com base em seu gráfico. Observe o exemplo que se segue:



Observe que a reta contém os pontos (1, 0) e (0, −2). Isto significa que, se x = 0, então f(x) = −2; se x = 1, então f(x) = 0.

Substituímos estes dados na expressão geral, temos:

$f(x) = ax + b$ $\qquad$ $f(1) = a \cdot 1 + b$

$f(0) = a \cdot 0 + b$ $\qquad$ $0 = a + b$ ❷

$-2 = 0 + b$

$b = -2$ ❶

De ❶ temos que $b = -2$. Substituímos em ❷

$a + b = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

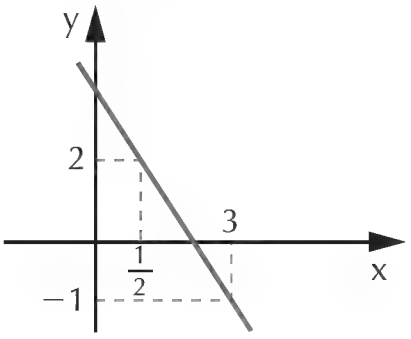
Portanto, $f(x) = 2x - 2$

Agora, observe como obter a função $f(x) = ax + b$ por meio de um gráfico que não mostra seus pontos de intersecção com os eixos x e y:

Observe que:

se $x = \frac{1}{2}$, então $y = 2$ ou $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

se $x = 3$, então $y = -1$ ou $f(3) = -1$.



Substituímos estes dados em $f(x) = ax + b$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a\frac{1}{2} + b \Rightarrow 2 = \frac{a}{2} + b$$

$$\frac{4}{2} = \frac{a + 2b}{2} \Rightarrow a + 2b = 4$$

$f(3) = a \cdot 3 + b \Rightarrow -1 = 3a + b \Rightarrow 3a + b = -1$

Temos de resolver o sistema obtido com as equações:

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 3a + b = -1 \quad \text{(multiplicar por } -2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \quad ③ \\ -6a - 2b = 2 \quad \text{(somar as equações)} \end{cases}$$

$$-5a = 6 \Rightarrow a = -\frac{6}{5} \quad \text{substituir em } ③$$

$$-\frac{6}{5} + 2b = 4 \Rightarrow 2b = \frac{20 + 6}{5} \Rightarrow b = \frac{13}{5}$$

$$f(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{13}{5} \text{ ou } f(x) = \frac{-6x + 13}{5}$$

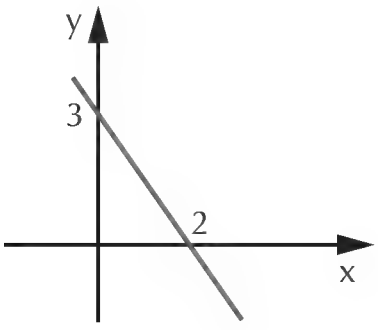
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. Esboce o gráfico de cada uma das funções:
   a) $y = 3x + 1$
   b) $y = -x + 7$
   c) $f(x) = -5x$

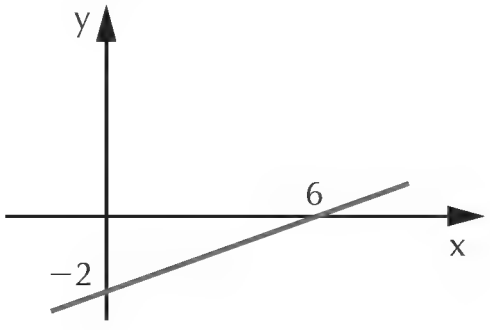
3. Na função $y = ax + b$, sabe-se que $f(1) = 0$ e $f(3) = 4$. Determine a função.

4. Para cada um dos gráficos, determine a respectiva função:

a)



b)

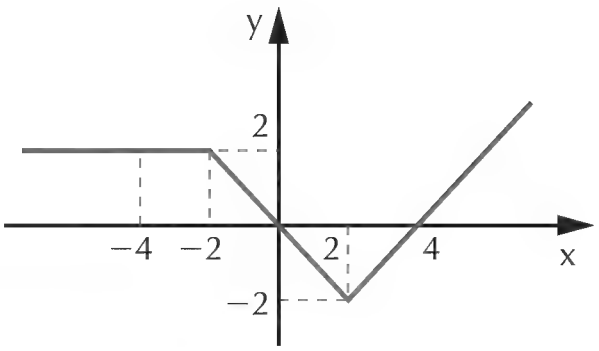


5. Para o gráfico a seguir, defina a função $y = ax + b$, em cada um dos intervalos pedidos:

a) para $x < -2$

b) para $-2 \leqslant x \leqslant 2$

c) para $x > 2$



3. Raiz ou zero da função do 1º grau

A raiz ou *zero* da função do 1º grau é o valor de x para o qual $y = f(x) = 0$. Graficamente, é o ponto em que a reta "corta" o eixo x. Portanto, para determinar a raiz da função, basta a igualarmos a zero:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine a raiz da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 3x + 1$.

Resolução: Igualamos f(x) a zero, portanto:

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Quando determinamos a(s) raiz(es) de uma função, o(s) valor(es) encontrado(s) deve(m) ser expresso(s) sob a forma de conjunto, denominado *conjunto-verdade* (V) ou *conjunto-solução* (S), da seguinte maneira: $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

2. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que -5 seja a raiz da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x + 3m$.

Resolução: Se -5 é raiz, então para $x = -5$ temos que $f(x) = 0$; substituímos estes dados na função:

$$f(x) = -x + 3m \Rightarrow 0 = -(-5) + 3m \Rightarrow 0 = 5 + 3m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3m = -5 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{5}{3}}$$

3. Determine o valor de $k \in \mathbb{R}$ para que a função $f(x) = (4k + 12)\,x + 1$ seja crescente.

Resolução: A função $f(x) = ax + b$ é crescente se a for positivo ($a > 0$).

Por comparação, na função dada $a = 4k + 12$, temos então:

$$4k + 12 > 0 \Rightarrow 4k > -12 \Rightarrow k > -3$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6. Determine em $\mathbb{R}$ a raiz de cada uma das funções:

a) $f(x) = -x + 7$

b) $f(x) = 3x + 9$

c) $f(x) = \frac{x}{2} - 7$

d) $y = -4x - 12$

e) $y = \frac{1}{3}x + 5$

7. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que -3 seja raiz da função $y = 12x + k \in \mathbb{R}$.

8. Sabendo que 10 é raiz da função $y = -(3p - 1)\,x - 7$, determine $p \in \mathbb{R}$.

9. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que as funções sejam crescentes:

a) $y = (m + 3)x$

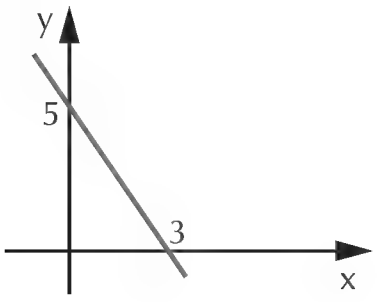
b) $y = (2m + 5)x - 1$

10. Determine $p \in \mathbb{R}$ para que as funções sejam decrescentes:

a) $f(x) = (3p - 81)x + 9$

b) $y = (\frac{p}{7} + 1)x - 4$

11. A partir do gráfico, determine a raiz da função:



Leia sobre Temperatura × Altitude no Encarte Colorido.

4. Estudo de sinal da função do 1º grau

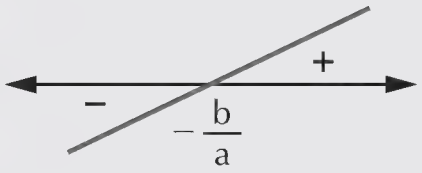
Estudar o sinal de uma função do 1º grau é *determinar os valores de x para que y seja positivo, negativo ou zero.*

Regra prática para o estudo de sinal da função $f(x) = ax + b$

1º) Determinamos a raiz da função, igualando-a a zero:

$$(\text{raiz: } x = -\frac{b}{a})$$

2º) Verificamos se a função é crescente ($a > 0$) ou decrescente ($a < 0$); temos então duas possibilidades:

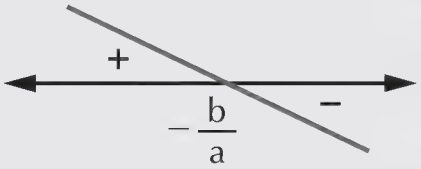


a) a função é crescente

se $x = -\frac{b}{a}$, então $y = 0$.

se $x < -\frac{b}{a}$, então $y < 0$.

se $x > -\frac{b}{a}$, então $y > 0$.



b) a função é decrescente

se $x = -\frac{b}{a}$, então $y = 0$.

se $x < -\frac{b}{a}$, então $y > 0$.

se $x > -\frac{b}{a}$, então $y < 0$.

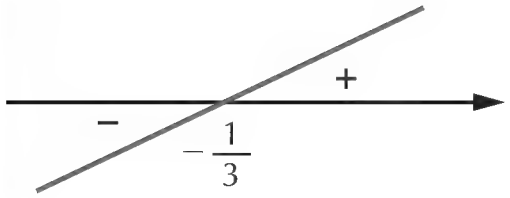
EXERCÍCIO RESOLVIDO

Estude o sinal das funções:

a) $y = 3x + 1$

Resolução: A raiz da função: $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

Como o coeficiente de x é positivo (a 5 3), a função é crescente. Façamos o esboço:



se $x = -\frac{1}{3}$, então $y = 0$

se $x < -\frac{1}{3}$, então $y < 0$

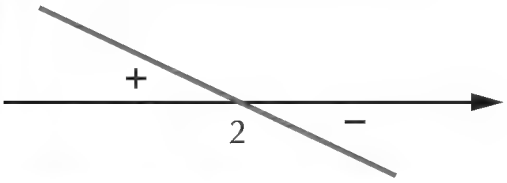
se $x > -\frac{1}{3}$, então $y > 0$

b) $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$

Resolução: A raiz da função: $-\frac{x}{2} + 1 = 0 \Rightarrow -\frac{x}{2} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$

Como o coeficiente de x é negativo ($a = -\frac{1}{2}$), a função é decrescente; temos então:



se $x = 2$, então $y = 0$

se $x < 2$, então $y > 0$

se $x > 2$, então $y < 0$

EXERCÍCIO PROPOSTO

12. Para cada caso, faça o estudo de sinal da função:

a) $f(x) = -x + 7$ c) $y = -2x - 3$ e) $f(x) = 4x + 6$

b) $f(x) = \frac{x}{3} + 4$ d) $y = \frac{-x + 1}{5}$ f) $y = -3x - 1$

5. Inequação do 1º grau

A inequação se caracteriza pela presença de um dos seguintes sinais de desigualdade: $>$, $<$, $\geqslant$ ou $\leqslant$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $2x - 1 > 3$.

Resolução:

Resolver esta inequação é determinar o conjunto de números que quando substituídos em *x* fornece números maiores que 3. Temos então de isolar *x* no 1º membro da inequação:

$$2x - 1 > 3 \Rightarrow 2x > 3 + 1 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

13. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $2x + 5 \leqslant 9$

b) $\frac{x}{3} - 1 \geqslant 4$

c) $2(x + 1) - 4 < x - 1$

d) $3x + 1 > 2(x - 5) + 9$

e) $\frac{x}{5} - 7 < x + 10$

f) $4x - 1 \geqslant \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

6. Inequações produto e quociente

Para resolver uma inequeção-produto ou uma inequação-quociente, devemos estudar os sinais das funções separadamente, transportar os resultados para um quadro e efetuar o produto dos sinais. Assim, obtemos os valores de x que satisfazem à desigualdade estudada, Vejamos alguns exemplos a seguir:

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva a inequação-produto $(x + 1)(2x - 3) > 0$.

Resolução:

Chamemos as funções de f(x) e h(x), então:

$f(x) = x+1$ $\qquad$ $h(x) = 2x - 3$

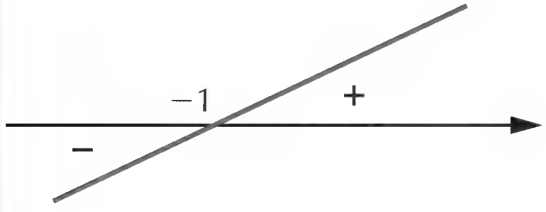
Queremos determinar o conjunto de valores de x tal que o produto $f(x) \cdot h(x)$ seja positivo.

Façamos o estudo do sinal das funções separadamente:

$f(x) = x + 1 \Rightarrow$ raiz de f(x): $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

O coeficiente de *x* é positivo (a = 1), então f(x) é crescente.

Observe que:



se *x* é menor que −1, *y* é *negativo*;

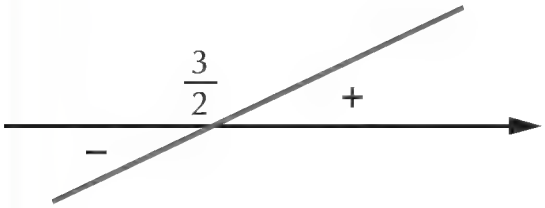
se *x* é maior que −1, *y* é *positivo*.

$h(x) = 2x - 3$

raiz de h(x): $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

O coeficiente de *x* é positivo (a = 2), então h(x) é crescente.

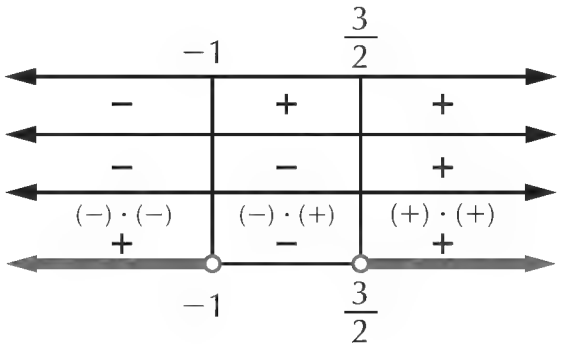
Observe que:



se *x* é menor que $\frac{3}{2}$, *y* é *negativo*;

se *x* é maior que $\frac{3}{2}$, *y* é *positivo*.

Agora que sabemos os sinais de cada função separadamente, vamos transportá-los para um quadro de sinais. O quadro terá três linhas: a primeira para f(x), a segunda para h(x) e a terceira para a solução f(x) · h(x). As raízes devem ser colocadas em ordem crescente e indicadas por uma bolinha branca, porque elas apenas delimitam os intervalos do conjunto-solução, já que na inequação original não consta o sinal de igualdade.



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{3}{2} \right\}$$

2. Resolva a inequação-quociente $\frac{2x + 3}{-x + 9} \leqslant 0$.

Resolução:

Procedemos, como nos exemplos anteriores, fazendo o estudo de sinal das funções separadamente, porém devemos observar que *o* denominador não pode se anular, então:

$$-x + 9 \neq 0 \Rightarrow -x \neq -9 \Rightarrow x \neq 9$$

O número 9 não fará parte do conjunto-solução, portanto devemos nos lembrar de simbolizar o 9 com uma bolinha branca e não utilizar o sinal de igualdade no intervalo cuja extremidade seja o 9.

Considere as funções:

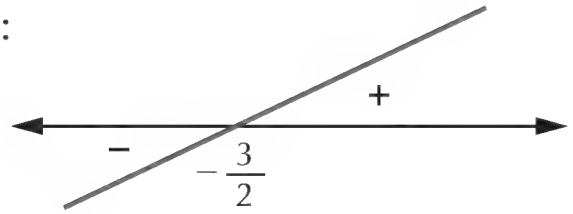
$f(x) = 2x + 3$ e $h(x) = -x + 9$

Sinais de $f(x) = 2x + 3$:

raiz de $f(x)$: $x = -\frac{3}{2}$

$a = 2 \Rightarrow$ função crescente

Sinais de $f(x)$:

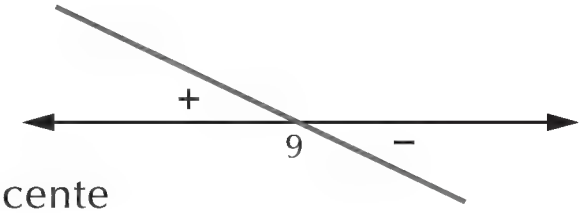


Sinais de $h(x)$:

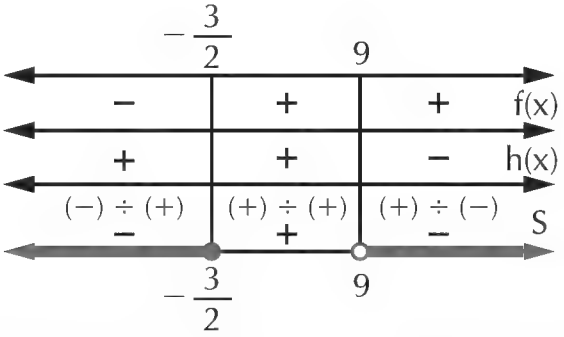
$h(x) = -x + 9$

raiz de $h(x)$: $x = 9$

$a = -1 \Rightarrow$ função decrescente



No quadro de sinais, temos:



Procuramos os valores de *x* tal que o quociente seja menor ou igual a zero, então o conjunto-solução é composto pelos intervalos onde o sinal é negativo. Lembre-se de que o número 9 não pode ser incluído na solução.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{3}{2} \text{ ou } x > 9\right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

14. Resolver em $\mathbb{R}$ cada uma das inequações:

a) $(-x + 7)(2x + 4) > 0$

b) $(3x - 1)(x + 5) \leqslant 0$

c) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)(-x - 2) \geqslant 0$

d) $(8x - 4)(-3x + 6) < 0$

15. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

a) $\frac{2x-7}{x-1} \geqslant 0$ c) $\frac{-x+5}{2x-4} > 0$ b) $\frac{3x+4}{x} \leqslant 0$ d) $\frac{x}{3x+27} \geqslant 0$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

16. (Acafe-SC) Seja $y = ax + b$. Assinale a alternativa correta:

a) o gráfico da função passa sempre pela origem.

b) o gráfico da função nunca passa pela origem.

c) o gráfico da função corta sempre o eixo das ordenadas.

d) o zero da função é $\frac{b}{a}$.

e) a função é crescente para $a < 0$.

17. (PUC-SP) No conjunto dos números reais, a equação $ax = b$, na incógnita x:

a) não pode ter infinitas soluções.

b) sempre tem solução.

c) só tem solução se $a \neq 0$.

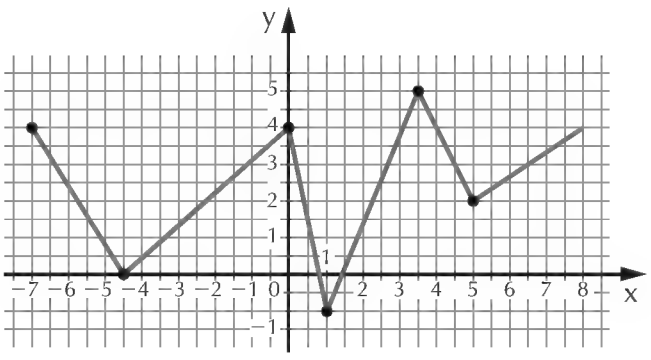
d) tem infinitas soluções se $b \neq 0$.

e) tem solução única se $a \neq 0$.

18. (UFG-GO) O produto da soma pela diferença de dois números inteiros é 12. Determine esses números.

19. (UFSC) Seja $f(x) = ax + b$ uma função linear. Sabe-se que $f(-1) = 4$ e $f(2) = 7$. Dê o valor de $f(8)$.

20. (UFMG) Observe a figura:



Essa figura contém o gráfico da função $y = f(x)$ definida em $A = \{x \in \mathbb{R}: -7 \leqslant x \leqslant 8\}$.

Todas as afirmativas sobre a figura estão corretas, EXCETO:

a) A soma de todas as raízes distintas de f(x) é negativa.

b) $f(-5) < f(6)$

c) $f(-4) + f(2) > 1$

d) A soma de todos os valores distintos de x, $x \in A$, tais que $f(x) = 3$ é um número positivo.

e) $f(3) - f(-2) < 0$.

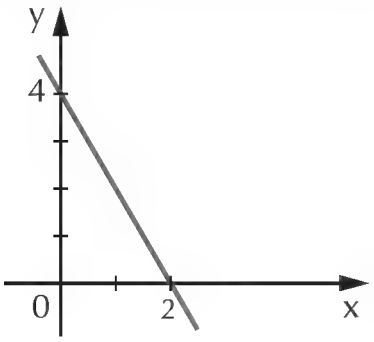
21. (UFRN) O gráfico da função *f* é o segmento de reta que une os pontos (22, 2) e (2, 0).

O valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ é:

a) 1 c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{7}{8}$

b) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{8}$

22. (UFMG) Observe a figura:



O gráfico da função $f(x) = ax + b$ está representado nessa figura. O valor de $a + b$ é:

a) -2 d) $\frac{9}{2}$

b) 2 e) 6

c) $\frac{7}{2}$

23. (UFPB) A reta que passa pelos pontos (0, 3) e (5, 0) também passa pelo ponto:

a) (5, 3) d) (0, 0)

b) (3, 5) e) $(-13, 5)$

c) $(10, -3)$

24. (UFPI) A função de variável real, definida por:

$f(x) = (3 - 2a)x + 2$, é crescente quando:

a) $a > 0$ c) $a = \frac{3}{2}$

b) $a < \frac{3}{2}$ d) $a > \frac{3}{2}$

25. (UFSC) A soma dos quadrados dos extremos do intervalo que satisfaz, simultaneamente, as inequações $x + 3 \geqslant 2$ e $2x - 1 \leqslant 17$ é:

26. (UFMG) O conjunto-solução da desigualdade $\frac{3}{x-5} \leqslant 2$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{13}{2}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leqslant \frac{13}{2}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5 \text{ ou } x \geqslant \frac{13}{2}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \text{ ou } x > \frac{13}{2}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5 \text{ ou } x \geqslant \frac{13}{2}\right\}$

Capítulo 2

Função do 2º Grau

Se gosta de esportes, provavelmente você deve se lembrar do saque "Jornada nas Estrelas". Neste saque, o jogador dá um impulso inicial à bola de baixo para cima, fazendo com que esta atinja cerca de 15 m de altura, caindo diretamente no campo adversário. A trajetória percorrida pela bola é uma curva denominada *parábola*. Algebricamente, essa curva representa uma função do 2º grau.

Em cerca de 2000 a.C., matemáticos babilônios já resolviam algumas equações do 2º grau. Nessa época, utilizavam regras ou figuras nas resoluções, já que não faziam uso de letras simbolizando números e, conseqüentemente, não tinham fórmulas.

Foi o matemático hindu Bhaskara que encontrou a resolução da equação do 2º grau sem recorrer a figuras; mas somente no século XVI, quando o matemático francês François Viète começou a usar letras simbolizando coeficientes e incógnitas, a fórmula de Bhaskara adquiriu o formato que conhecemos hoje.

Definição:

Chama-se *função do 2º grau* ou *função quadrática,* de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$, a função

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c},$$

onde *a*, *b* e *c* são números reais e $a \neq 0$.

a é o coeficiente de x^2

b é o coeficiente de x

c é o termo independente

Chama-se *função completa* aquela em que *a*, *b* e *c* não são nulos, e *função incompleta* aquela em que *b* ou *c* são nulos.

Observe os exemplos:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

é função quadrática completa onde $a = 1$, $b = 2$ e $c = -1$.

2) $y = 2x^2 - 8$

é função quadrática incompleta onde $a = 2$, $b = 0$ e $c = -8$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Em cada caso, determine $m \in \mathbb{R}$ para que a função seja do 2º grau.

a) $y = (2m + 1)x^2 + 3x - 1$

Resolução:

Pela definição, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é quadrática se $a \neq 0$. Por comparação, no exercício, $a = 2m + 1$, então:

$$2m + 1 \neq 0 \Rightarrow 2m \neq -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m \neq -\frac{1}{2}}$$

b) $f(x) = \left(\frac{m}{3} - \frac{4}{5}\right) x^2 + 5$

Resolução:

$$\frac{m}{3} - \frac{4}{5} \neq 0 \Rightarrow \frac{m}{3} \neq \frac{4}{5} \Rightarrow 5m \neq 12 \Rightarrow \boxed{m \neq \frac{12}{5}}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Em cada caso, determine $k \in \mathbb{R}$ para que a função seja do 2º grau:

a) $y = (-k + 1)x^2 - 2x - 1$

b) $f(x) = \left(\frac{k}{5} + 7\right)x^2$

c) $y = (-3k + 15)x^2 + 4x - 1$

d) $f(x) = kx^2 + 3x - 7$

1. Raízes da função do 2º grau

Analogamente à função do 1º grau, para encontrar as raízes da função quadrática, devemos igualar f(x) a zero. Teremos então:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

A expressão assim obtida denomina-se *equação do 2º grau*. As raízes da equação são determinadas utilizando-se a *fórmula de Bhaskara:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Δ (letra grega: delta) é chamado de *discriminante* da equação. Observe que o discriminante terá um valor numérico, do qual temos de extrair a raiz quadrada. Neste caso, temos três casos a considerar:

$\Delta > 0 \Rightarrow$ duas raízes reais e distintas;

$\Delta = 0 \Rightarrow$ duas raízes reais e iguais;

$\Delta < 0 \Rightarrow$ não existem raízes reais ($\nexists\, x \in \mathbb{R}$).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva as equações do 2º grau:

a) $-7x^2 + 6x + 1 = 0$

Resolução:

Vamos utilizar a fórmula de Bhaskara para resolver esta equação:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \cdot (-7) \cdot 1 = 36 + 28 = 64$$

$$x = \frac{-6 \pm 8}{-14} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6+8}{-14} = \dfrac{2}{-14} = -\dfrac{1}{7} \\ x_2 = \dfrac{-6-8}{-14} = \dfrac{-14}{-14} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left\{-\frac{1}{7}, 1\right\}$$

b) $x^2 - 3x = 0$

Resolução:

Nas equações incompletas onde c = 0, pode-se aplicar a fórmula de Bhaskara ou fatorar-se colocando *x* em evidência:

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 3) = 0$$

Se um produto é zero, então pelo menos um dos fatores é zero:

$$x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{0, 3\}$$

c) $x^2 - 81 = 0$

Resolução:

Nas equações incompletas onde b = 0, pode-se aplicar a fórmula, porém é mais simples isolar o *x* no primeiro

membro e lembrar que teremos duas soluções, pois c é um número negativo.

$$x^2 - 81 = 0 \Rightarrow x^2 = 81$$

Sabemos que $(-9)^2 = 81$ e $9^2 = 81$, então $x = \pm 9$

$$S = \{-9, 9\}$$

2. Determine o valor de $p \in \mathbb{R}$ para que a função $y = px^2 + 2x - 1$:

   a) tenha duas raízes reais e distintas.

   b) tenha duas raízes reais e iguais.

   c) não tenha raízes reais.

Resolução:

a) Para que a função tenha duas raízes reais e distintas, Δ deve ser um número positivo. Temos então:

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (2)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 + 4p > 0 \Rightarrow 4p > -4 \Rightarrow p > -1$$

b) Para que a função tenha duas raízes reais e iguais, Δ deve ser igual a zero, portanto:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4 + 4p = 0 \Rightarrow 4p = -4 \Rightarrow p = -1$$

c) Para que a função não tenha raízes reais, Δ deve ser um número negativo, então:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4 + 4p < 0 \Rightarrow 4p < -4 \Rightarrow p < -1$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. Resolva as equações:

   a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

   b) $7x^2 + 6x + 2 = 0$

   c) $-6x^2 + 12x = 0$

   d) $x^2 + 3x + 5 = 0$

   e) $16x^2 - 9 = 0$

   f) $x^2 - 8x - 9 = 0$

   g) $x^2 + 5x - 6 = 0$

3. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que a função $y = 2x^2 - x + k$ tenha duas raízes reais e diferentes.
4. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a função $y = x^2 + mx + \frac{1}{4}$ tenha duas raízes reais e iguais.
5. Determine $p \neq 0$, $p \in \mathbb{R}$, de modo que a função $f(x) = px^2 - 4x + 1$ não tenha raízes reais.

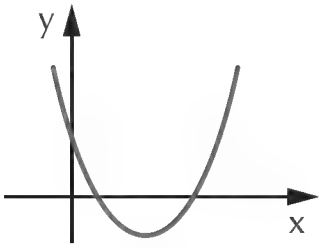
2. Gráfico da função do 2º grau

2.1 Concavidade da parábola

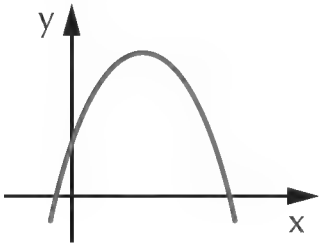
Graficamente, a função do 2º grau, de domínio $\mathbb{R}$, é representada por uma curva denominada *parábola.*

Dada a função $y = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é uma parábola, se:

$a > 0$, a concavidade será voltada para cima.

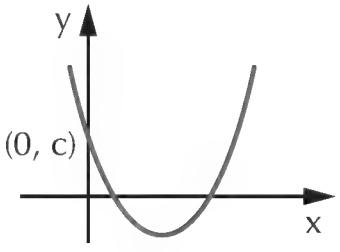


$a < 0$, a concavidade será voltada para baixo.



2.2 O termo independente

Na função $y = ax^2 + bx + c$, se $x = 0$ temos $y = c$. Os pontos em que $x = 0$ estão no eixo y, isto significa que *o ponto (0, c) é onde a parábola "corta" o eixo y.*

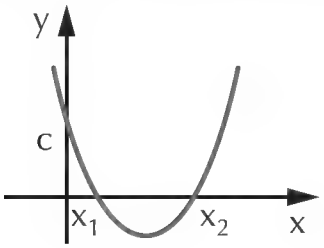


2.3 Raízes da função

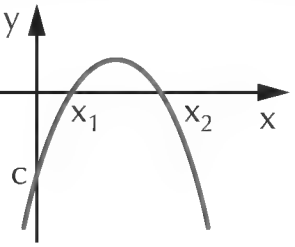
Considerando os sinais do discriminante (Δ) e do coeficiente de x^2, teremos os gráficos que seguem para a função $y = ax^2 + bx + c$.

1º caso: $\Delta > 0$ (duas raízes reais e distintas, $x_1 \neq x_2$)

$a > 0$ (concavidade para cima)

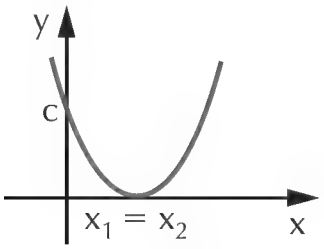


$a < 0$ (concavidade para baixo)

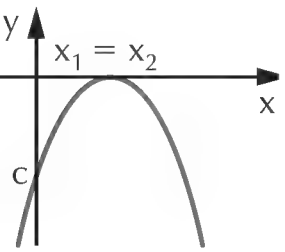


2º caso: $\Delta = 0$ (duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$)

$a > 0$ (concavidade para cima)

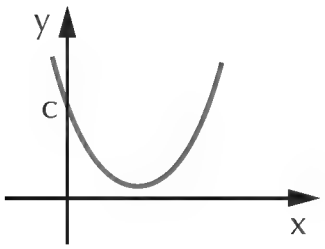


$a < 0$ (concavidade para baixo)

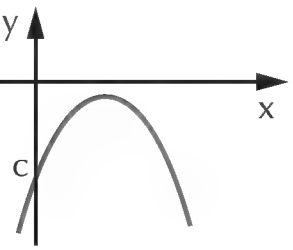


3º caso: $\Delta < 0$ (não tem raiz real, $\nexists\, x \in \mathbb{R}$)

$a > 0$ (concavidade para cima)



$a < 0$ (concavidade para baixo)



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que a parábola cuja função é $y = \left(\frac{k}{3} + 7\right)x^2 + 2x - 1$ tenha:

   a) concavidade voltada para cima;

   b) concavidade voltada para baixo.

Resolução:

a) Queremos que a concavidade esteja voltada para cima. Neste caso, o coeficiente de x^2 deve ser positivo, então:

$$\frac{k}{3} + 7 > 0 \Rightarrow \frac{k}{3} > -7 \Rightarrow \boxed{k > -21}$$

b) Queremos que a concavidade esteja voltada para baixo. Neste caso, o coeficiente de x^2 deve ser negativo, então:

$$\frac{k}{3} + 7 < 0 \Rightarrow \boxed{k < -21}$$

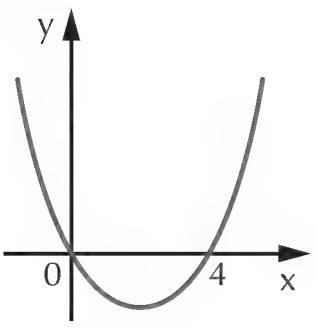
2. Analisando cada um dos gráficos das funções quadráticas, identifique:

   ❶ o sinal do discriminante;

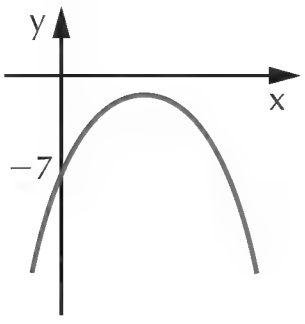
   ❷ as raízes da função;

   ❸ o valor do termo independente.

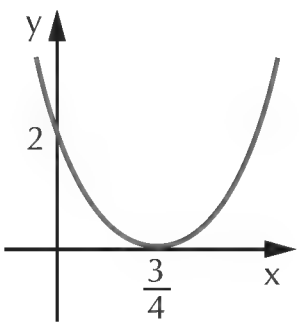
a)



b)



c)



Resolução:

a) ❶ Como a parábola intercepta o eixo x em dois pontos, o discriminante é positivo ($\Delta > 0$).

   ❷ As raízes são 0 e 4.

   ❸ A parábola corta o eixo y no ponto (0, 0), então $c = 0$.

b) ❶ A parábola não "corta" o eixo x, então $\Delta < 0$.

❷ Sendo $\Delta < 0$, a função não possui raízes reais.

❸ $c = -7$

c) ❶ A parábola intercepta o eixo x em um único ponto, então $\Delta = 0$.

❷ O ponto de intersecção da parábola com o eixo x é $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, então a raiz é $\frac{3}{4}$.

❸ $c = 2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6. Para cada função quadrática, determine $p \in \mathbb{R}$ de modo que:
   ① a concavidade da parábola esteja voltada para cima;
   ② a concavidade da parábola esteja voltada para baixo.

   a) $y = (2p - 4)x^2 + 2x - 1$

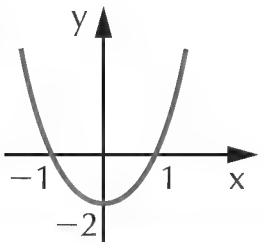
   b) $y = \left(\frac{p}{2} + 9\right)x^2 - x + 7$

   c) $y = (p + 23)x^2 + 3x - 10$

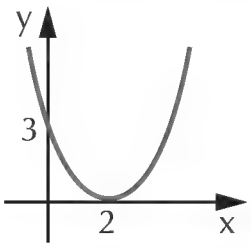
   d) $y = (-2p + 12)x^2 + 3x - 5$

7. Em cada gráfico, identifique: ① o sinal do discriminante;
   ② as raízes da função;
   ③ o valor do termo independente.

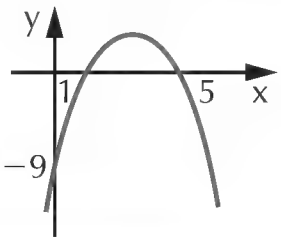
a)



b)



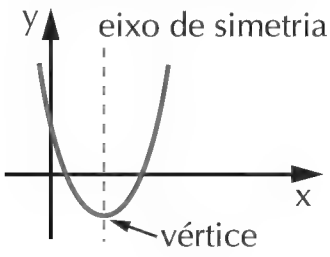
c)



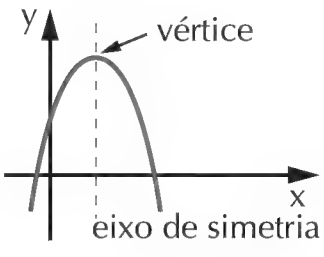
3. Vértice da parábola – Máximos e mínimos da função

Observe os vértices nos gráficos abaixo:

• se $a > 0$



• se $a < 0$



O vértice da parábola será:

- o *ponto mínimo* se a concavidade estiver voltada para cima ($a > 0$);
- o *ponto máximo* se a concavidade estiver voltada para baixo ($a < 0$).

A reta paralela ao eixo y que passa pelo vértice da parábola é chamada de *eixo de simetria*.

3.1 Coordenadas do vértice

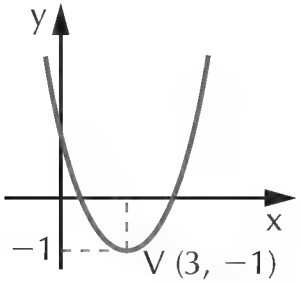
As coordenadas do vértice da parábola são dadas por

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

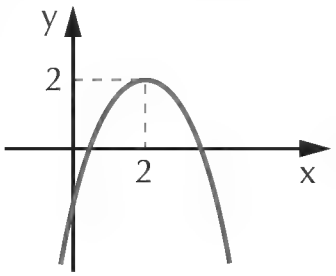
4. Conjunto imagem

Conhecendo a ordenada do vértice da parábola é possível determinar o conjunto imagem da função. Observe os exemplos:

a)



b)



Em a, a parábola tem concavidade voltada para cima, portanto o vértice é o ponto mínimo da função. Se projetarmos qualquer ponto da parábola sobre o eixo y, obteremos valores de *y* maiores ou iguais a -1, conforme mostra a figura; neste caso, o conjunto imagem é:

$$\text{Im(f)} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$$

Já em b, a parábola tem concavidade voltada para baixo, então o vértice é o ponto máximo da função. Ao projetarmos qualquer ponto sobre o eixo y, teremos valores de *y* menores ou iguais a 2. O conjunto imagem será:

$$\text{Im(f)} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Construa os gráficos de cada função, determinando o respectivo conjunto imagem:

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$

Resolução:

Vamos então determinar as raízes da função, igualando-a a zero.

$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$$x = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+1}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

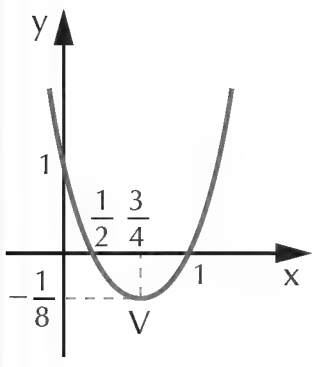
A parábola corta o eixo x nos pontos (1, 0) e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Em seguida, determinemos as coordenadas do vértice da parábola.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}\ ;\ y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4 \cdot 2} = -\frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

Para $x = 0$, temos que o ponto em que a parábola corta o eixo y é $c = 1$.



Como $a = 2$ (*a* é positivo), a concavidade da parábola está voltada para cima. Note que, ao projetarmos qualquer ponto da parábola sobre o eixo y, encontraremos sempre valores de y maiores ou igual a $-\frac{1}{8}$.

$$Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{1}{8}\right\}$$

b) $y = \frac{-x^2}{3} + x - 9$

Resolução:

Vamos então determinar as raízes.

$$\frac{-x^2}{3} + x - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)(-9) \Rightarrow$$

$$\Delta = 1 - 12 = -11$$

Como $\Delta < 0$, não existem raízes reais que satisfaçam a equação, então a parábola não intercepta o eixo x. Observe que $a = -\frac{1}{3}$, portanto a parábola tem concavidade voltada para baixo e estará abaixo do eixo x. Note que a função não possui raízes reais, porém existe um gráfico para representá-la.

Em seguida, vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola.

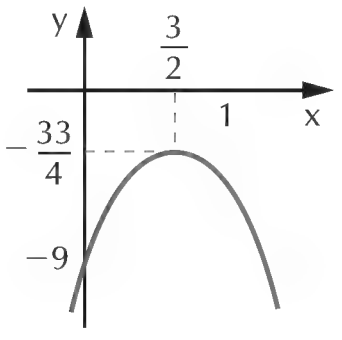
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = -1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{(-11)}{4\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{11}{-\frac{4}{3}} = 11 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{33}{4}$$

$$V = \left(\frac{3}{2}, -\frac{33}{4}\right)$$

Quando $x = 0$, temos que a parábola corta o eixo y em $c = -9$.

O gráfico será:



$$\text{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{33}{4} \right\}$$

2. (UFRGS-RS) Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $y = -2x^2 + 12x$, onde *y* é a altura, dada em metros. A altura máxima atingida pela bola é de:

a) 36 m b) 18 m c) 12 m d) 6 m e) 3 m

Resolução: altura máxima $\Rightarrow y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{-8} = 18$

Alternativa correta: b

EXERCÍCIO PROPOSTO

8. Determine as coordenadas do vértice de cada função:

a) $y = -x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x + 4$

c) $y = 5x^2 - x + 1$

d) $y = x^2 + 3x - 2$

e) $f(x) = -4x^2 + 2x$

9. Faça o gráfico de cada uma das funções, determinando o respectivo conjunto-imagem:

a) $y = x^2 - 9$

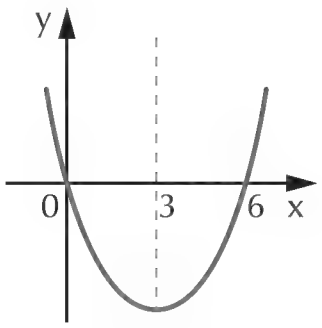
b) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

c) $y = -x^2 + 2x$

d) $y = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$

e) $y = x^2$

10. (UFMS) Considerando que o gráfico a seguir representa a função quadrática do tipo $y = ax^2 + bx$, determine a soma dos números associados à(s) afirmativa(s) VERDADEIRA(S):



01. O gráfico representa a função $y = x^2 - 6x$.
02. A ordenada do vértice que representa o valor mínimo da função é -9.
04. A abscissa do vértice é 3,5.
08. A função é positiva para $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 6\}$.
16. O domínio da função é $\mathbb{R}$.
32. O gráfico da função corta o eixo y no ponto (0, 0).

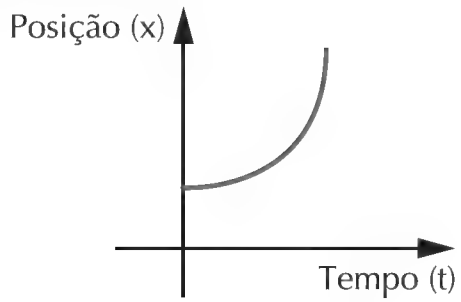
Aplicação Prática

Função da posição em relação ao tempo do MRUV

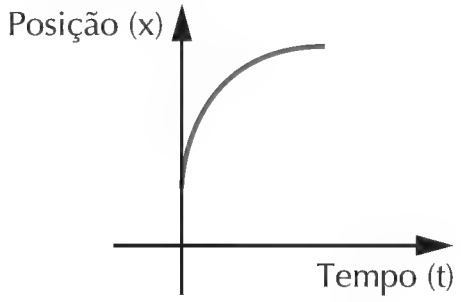
A função da posição em relação ao tempo do MRUV (movimento retilíneo uniformemente variado) é uma função do 2º grau em t, dada por:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

O gráfico dessa função é uma parábola, que terá concavidade para cima se a aceleração for positiva e para baixo se negativa.



$a > 0$



$a < 0$

Dessa maneira, os pontos em que a curva corta o eixo das abscissas (raízes da função) representam os instantes em que o ponto material passa pela origem, enquanto que os pontos de ordenadas máxima ($x_{máx.}$) e mínima ($x_{mín.}$) representam os instantes em que o ponto material está mais distante da origem.

(Gaspar, 2000)

5. Estudo do sinal da função do 2º grau

Estudar o sinal da função quadrática é determinar os valores de *x* para que *y* seja: positivo, negativo ou zero.

Vejamos a seguir as regras que definem esse estudo.

Regra prática para o estudo do sinal da função do 2º grau

Dada a função $f(x) = y = ax^2 + bx + c$, para saber os sinais de *y*, determinamos as raízes (se existirem) e analisamos o valor do discriminante. Poderemos ter:

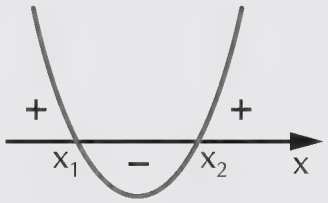
a) Se $\Delta > 0$, então as raízes são x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$:

se a > 0 temos

$x < x_1$ ou $x > x_2 \Rightarrow y > 0$

$x_1 < x < x_2 \Rightarrow y < 0$

$x = x_1$ ou $x = x_2 \Rightarrow y = 0$

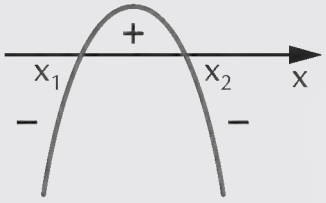


se a < 0 temos

$x < x_1$ ou $x > x_2 \Rightarrow y < 0$

$x_1 < x < x_2 \Rightarrow y > 0$

$x = x_1$ ou $x = x_2 \Rightarrow y = 0$

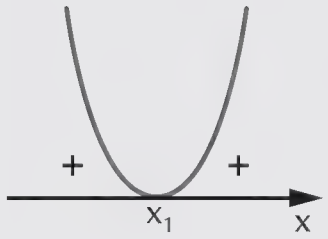


b) Se $\Delta = 0$, então as raízes são $x_1 = x_2$:

se a > 0 temos:

$x = x_1 \Rightarrow y = 0$

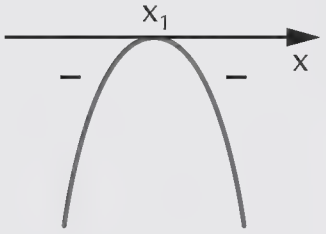
$\forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq x_1 \Rightarrow y > 0$



se a < 0 temos:

$x = x_1 \Rightarrow y = 0$

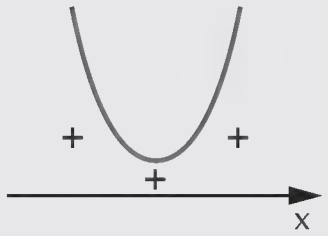
$\forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq x_1 \Rightarrow y < 0$



c) Se $\Delta < 0$, então não existem raízes reais:

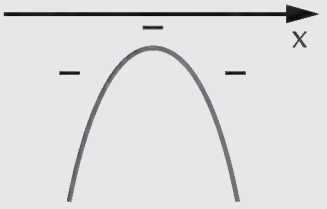
se a > 0 temos

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$



se a < 0 temos

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y < 0$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Estude o sinal de cada função:

a) $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$

Resolução:

Inicialmente, determinamos as raízes da função:

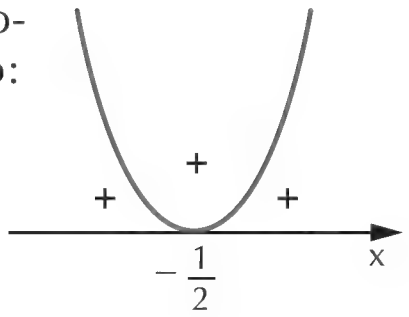
$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

Como a = 1, a concavidade da parábola está voltada para cima. Temos então:

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

$$x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow y > 0$$



b) $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$

Resolução:

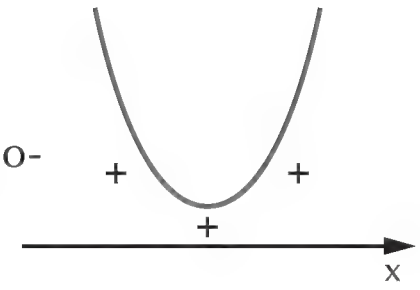
Determinamos o discriminante:

$\Delta = 36 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 36 - 40 = -4$

Como $\Delta < 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

Sendo a = 5, a concavidade da parábola está voltada para cima, então:

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$



c) $y = -2x^2 + 18$

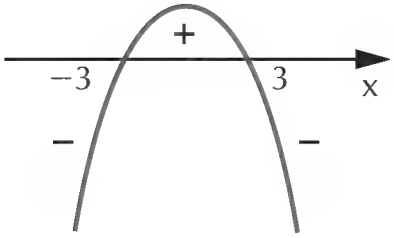
Resolução:

Inicialmente, determinamos as raízes:

$$-2x^2 + 18 = 0 \Rightarrow -2x^2 = -18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Como temos duas raízes distintas, o discriminante é positivo e como $a = -2$, a concavidade da parábola está voltada para baixo. Temos então

$$\begin{cases} x < -3 \text{ ou } x > 3 \Rightarrow y < 0 \\ -3 < x < 3 \Rightarrow y > 0 \\ x = -3 \text{ ou } x = 3 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$



EXERCÍCIO PROPOSTO

11. Estude o sinal de cada função:

a) $y = 3x^2 - 2x - 3$ d) $y = 10x^2 + 2x + 1$ f) $f(x) = -x^2$

b) $f(x) = -x^2 + 16$ e) $y = -3x^2 + 2x + 1$ g) $y = 5x^2$

c) $y = -x^2 + 2x - 2$

6. Inequações do 2º grau

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$ e a, b, c são números reais. A inequação do 2º grau é toda desigualdade, tal que:

$f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$.

Resolver uma inequação quadrática é determinar o conjunto de valores de *x* que satisfaçam a desigualdade pedida.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Resolva as inequações:

a) $x^2 - 4x + 3 > 0$

Resolução:

Para resolver esta inequação, devemos fazer o estudo do sinal da função e determinar os valores de *x* para que a função seja positiva.

Estudo do sinal: começamos por determinar as raízes, igualando a função a zero:

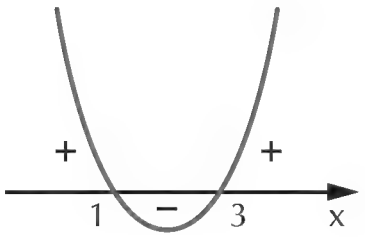
$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 2}{2 \cdot 1} \begin{cases} x_1 = \dfrac{4 + 2}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{4 - 2}{2} = 1 \end{cases}$$

As raízes são 1 e 3 e, como a = 1, a concavidade da parábola está voltada para cima.

Na inequação inicial $x^2 - 4x + 3 > 0$, queremos os valores de *x* para que a função seja positiva, portanto a solução são os intervalos em que aparece esse sinal:



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

b) $3x^2 - x + 1 \leq 0$

Resolução:

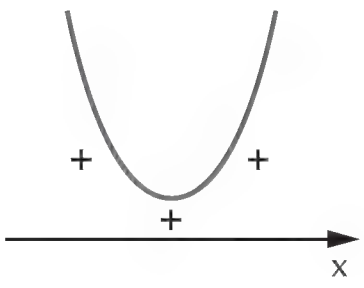
Estudo do sinal:

$3x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 1 - 12 = -11 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

A função não possui raízes reais e, como a = 3, a concavidade está voltada para cima.

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a função é sempre positiva. Portanto, não há solução para essa equação.



$S = \varnothing$

EXERCÍCIO PROPOSTO

12. Resolva as inequações:

a) $x^2 - 6x - 16 \geqslant 0$

b) $6x^2 - 5x + 1 \leqslant 0$

c) $-5x^2 + 6x - 2 \geqslant 0$

d) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} < 0$

e) $4x^2 - x + \frac{1}{2} > 0$

f) $x^2 + 3x - 4 \geqslant 0$

g) $x^2 + 2x - 1 < 0$

7. Inequações produto e quociente

Para resolvê-las, iremos fazer o estudo do sinal separadamente, transportar os sinais para um quadro, efetuar o produto dos sinais e determinar o(s) conjunto(s) que satisfaz(em) a desigualdade pedida. Vejamos o exercício resolvido.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Resolva as inequações:

a) $(x^2 - 2x) \cdot (-x^2 + 4x - 3) \geqslant 0$

Resolução:

Sejam $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = -x^2 + 4x - 3$.

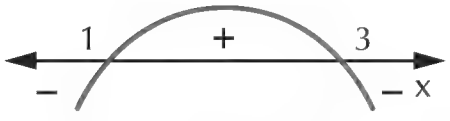
Façamos o estudo do sinal separadamente, utilizando os esboços dos gráficos:

Sinais de f(x)

$x < 0$ ou $x > 2 \Rightarrow y > 0$
$0 < x < 2 \Rightarrow y < 0$

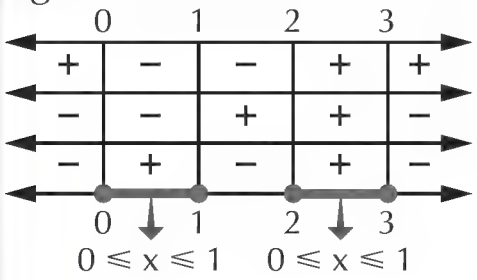
Sinais de g(x)

$x < 1$ ou $x > 3 \Rightarrow y < 0$
$1 < x < 3 \Rightarrow y > 0$



Transportamos os sinais obtidos para um quadro, onde a primeira linha é destinada aos sinais de f(x), a segunda aos sinais de g(x) e a terceira ao produto dos sinais de onde será extraído o conjunto-solução da inequação.

Lembre-se de que as raízes devem ser colocadas em ordem crescente e simbolizadas com uma bolinha preta, pois a desigualdade a ser resolvida contém o sinal de igualdade ($\geqslant$).



→ sinais de f(x)
→ sinais de g(x)
→ produto dos sinais: como queremos que $f(x) \cdot g(x)$ seja maior ou igual a zero, as soluções são os conjuntos em que os sinais são positivos.

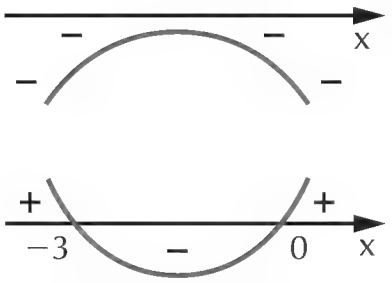
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3\}$$

b) $\dfrac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} \leqslant 0$

Resolução:

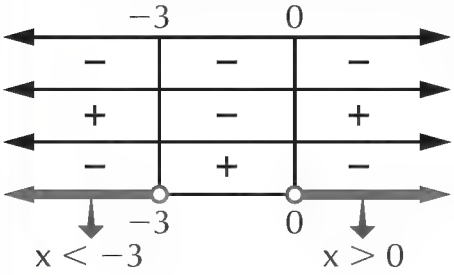
Sejam $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ e $g(x) = x^2 + 3x$, vamos analisar os sinais das funções.

Em f(x), qualquer que seja o valor de *x*, a função é sempre negativa.



Em g(x), temos:
$x < -3$ ou $x > 0 \Rightarrow y > 0$
$-3 < x < 0 \Rightarrow y < 0$

Transportamos os sinais para o quadro, lembrando que, como a função g(x) está no denominador da fração, temos de indicar as raízes de g(x), −3 e 0 com uma bolinha branca, garantindo assim que o denominador não se anulará.



→ sinais de f(x)
→ sinais de g(x)
→ produto dos sinais: como queremos que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ seja menor ou igual a zero, a solução são os intervalos que têm sinal negativo.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 0\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13. Resolva as inequações:

a) $(x^2 - 4x)(x^2 - 4x - 1) > 0$

b) $(6x^2 + 7x + 2)(-3x^2 + 10x) < 0$

c) $\frac{3x^2 - 27}{x^2 - 2x - 8} \geqslant 0$

d) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x-2} \leqslant -\frac{2}{x-1}$

e) $\frac{-3x}{-x+1} - \frac{1}{x} < 0$

14. (UFSE) Se $k \in \mathbb{R}$ é uma solução inteira da inequação $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x} \leqslant 0$, então k é igual a:

a) 1
b) 1 ou 4
c) 2 ou 3
d) 1, 2, 3 ou 4
e) 5, 6, 7, 8 ou 9

15. (Cesgranrio-RJ) Dadas as funções $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = 5 - x$ e $h(x) = x^2 - 4x + 3$, definimos a função $\varphi(x) = \frac{g(x) \cdot h(x)}{f(x)}$.

Analisando os valores de x, para os quais $\varphi(x) \geqslant 0$, temos:

a) $x < 1$ ou $3 < x < 5$
b) $x < 1$ ou $3 \leqslant x \leqslant 5$
c) $x \leqslant 1$ ou $3 \leqslant x \leqslant 5$
d) $x \geqslant 5$ ou $1 \leqslant x \leqslant 3$
e) $x > 5$ ou $1 < x < 3$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

16. (UFMG) O conjunto de todos os valores reais de x que satisfazem à desigualdade $\frac{-x^2 + 2}{-x^2 + 2x - 2} \leqslant 1$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant \sqrt{2}\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$

17. (UFBA) O trinômio $y = x^2 + mx + n$ admite 2 como raiz e tem valor mínimo para $x = 3$. Calcule $|mn|$.

18. (UFMG) Resolvendo-se a equação

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1}{x - 2} = 0,$$

$x \neq 2$, $x \neq 3$, pode-se afirmar que:

a) o produto de suas raízes é 6.

b) o produto de suas raízes é 12.

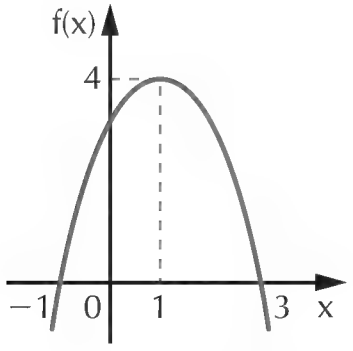
c) o produto de suas raízes é 24.

d) sua única raiz é impar.

e) sua única raiz é par.

19. (PUC-SP) Sendo x' e x'' os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = x^2 - 8x + m$. Determinar m para que se tenha $3x' - 4x'' = 3$.

20. (UFPB) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função quadrática cujo gráfico está desenhado abaixo, então



a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

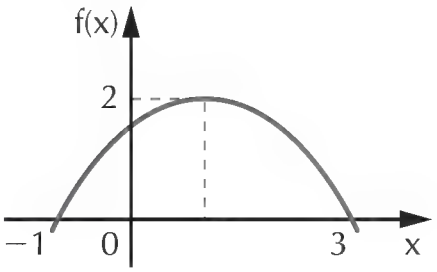
b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

c) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

d) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

e) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

21. (UFMG) Observe a figura:



A função do 2º grau, cujo gráfico nela está representado, é:

a) $y = \frac{3}{2} + x - \frac{x^2}{2}$

b) $y = x^2 - 2x - 3$

c) $y = -x^2 + 2x + 3$

d) $y = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2$

e) $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$

22. (Mackenzie-SP) O vértice da parábola $y = x^2 + kx + m$ é o ponto V $(-1, -4)$. O valor de $k + m$ é:

a) -2 c) 0 e) 2

b) -1 d) 1

23. (FGV-SP) O lucro de uma empresa é dado por $L(x) = 100\,(10 - x)(x - 2)$, onde x é a quantidade vendida. Podemos afirmar que:

a) o lucro é positivo qualquer que seja x.

b) o lucro é positivo para x maior que 10.

c) o lucro é positivo para x entre 2 e 10.

d) o lucro é máximo para x igual a 10.
e) o lucro é máximo para x igual a 3.

24. (UFSC) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2$. Determine a soma dos números associados às afirmativas VERDADEIRAS:

01. O gráfico de f(x) tem o vértice na origem;
02. f(x) é crescente em $\mathbb{R}$;
04. As raízes de f(x) são reais e iguais;
08. f(x) é decrescente em $[0, \infty[$;
16. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$;
32. O gráfico de f(x) é simétrico em relação ao eixo x.

25. (UFPI) A soma dos inversos das raízes da equação $x^2 + 6x + 4 = 0$ é igual a:

a) -6 c) $-\frac{3}{2}$ e) $-\frac{1}{6}$
b) 4 d) 0

26. (Fuvest-SP) A equação

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$$

tem duas raízes. A soma e o produto dessas raízes são iguais a:

a) -2 c) 3 e) 1
b) 0 d) -4

27. (UFSE) Se a equação $3x^2 - 4x + m = 0$ não tem raízes reais, é verdade que:

a) $m = \frac{4}{3}$ d) $m < 12$
b) $m > \frac{4}{3}$ e) $m > 13$
c) $m < \frac{7}{2}$

28. (Ufac) Se x é um número positivo e $x^2 = \frac{1}{2}$, conclui-se que x é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\sqrt{2}$ e) $-\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2}$

29. (FGV-SP) A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2 - 4x + a$ tem um valor máximo e admite duas raízes reais e iguais. Nessas condições, $f(-2)$ é igual a:

a) 4 d) $-\frac{1}{2}$
b) 2 e) -2
c) 0

Capítulo 3

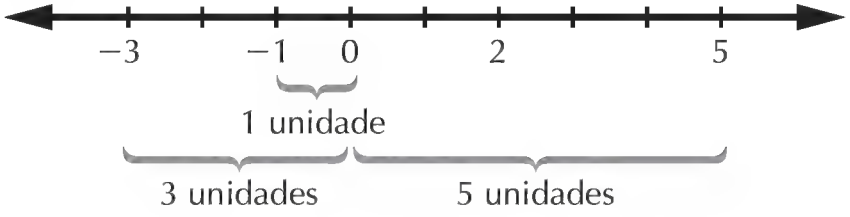
Função Modular

O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real surgiu como conseqüência do desenvolvimento teórico dos números inteiros. Na linguagem coloquial, não utilizamos números negativos, mas sim palavras que os simbolizam. Por exemplo:

- dizemos que a temperatura atingiu 5°C abaixo de zero e não −5°C;
- dizemos que uma conta bancária tem saldo devedor de R$ 100,00 e não −R$ 100,00;
- dizemos que o mergulhador chegou a 20 m abaixo do nível do mar e não a −20 m.

1. Módulo de um número real

Utilizamos os números em módulo acrescentando palavras que localizam sua posição em relação à origem. Portanto, o conceito de módulo de um número é basicamente geométrico. Observe a reta real:



O módulo de um número real é a distância do ponto correspondente a ele até a origem, portanto o módulo de um número é sempre positivo. Observe:

o módulo de -3 é 3. Para representar usamos a notação:

$$|-3| = 3$$

o módulo de -1 é 1, ou $|-1| = 1$

o módulo de -5 é 5, ou $|-5| = 5$

De modo geral, para calcular o módulo de um número procedemos da seguinte maneira:

- *se o número é positivo, conserva-se o sinal;*
- *se o número é negativo, troca-se o sinal.*

Definição:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule:

a) $|-5,7|$ b) $|91|$ c) $|2x|$ d) $|5x + 10|$ e) $|x^2 - 1|$

Resolução:

a) $|-5,7| = 5,7$ b) $|91| = 91$

c) Neste caso, o valor numérico depende da incógnita *x*. Como não sabemos se 2x é positivo ou negativo, temos de considerar os dois casos.

1º caso: Se 2x for *positivo* ou *zero*, conserva-se o sinal. Assim, $|2x| = 2x$

2º caso: Se 2x for *negativo*, troca-se o sinal.

Assim, $|2x| = -2x$

Resumindo, temos:

$$|2x| = \begin{cases} 2x \text{ se } 2x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0 \\ -2x \text{ se } 2x < 0 \Rightarrow x < 0 \end{cases}$$

d) Novamente, como não temos um valor numérico para $5x + 10$, temos de determinar x considerando que $5x + 10$ possa ser positivo ou negativo:

1º caso: Se $5x + 10$ for *positivo* ou *zero*, conserva-se o sinal.

$5x + 10 \geqslant 0 \Rightarrow 5x \geqslant -10 \Rightarrow x \geqslant -2$

Então, $|5x + 10| = 5x + 10$ para $x \geqslant -2$.

2º caso: Se $5x + 10$ for *negativo*, troca-se o sinal.

$5x + 10 < 0 \Rightarrow 5x < -10 \Rightarrow x < -2$

Então, $|5x + 10| = -5x - 10$ para $x < -2$.

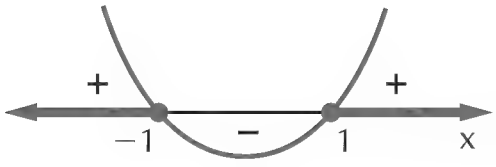
Resumindo, temos:

$$|5x + 10| = \begin{cases} 5x + 10 \text{ se } x \geqslant -2 \\ -5x - 10 \text{ se } x < -2 \end{cases}$$

e) Vamos considerar os dois casos.

1º caso: Se $x^2 - 1$ for *positivo* ou *zero*, conserva-se o sinal.

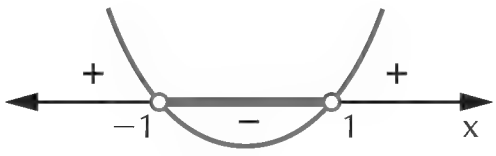
$x^2 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$



Então, $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ para $x \leqslant -1$ e $x \geqslant 1$

2º caso: Se $x^2 - 1$ for *negativo*, troca-se o sinal.

$x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$



Portanto $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$ para $-1 < x < 1$

Resumindo, temos:

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ se } x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ -x^2 + 1 \text{ se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule:

a) $|-15|$ c) $|-7,3|$ e) $|81|$

b) $|204|$ d) $|-16,1|$ f) $|12,5|$

2. Calcule, em função de x, onde $x \in \mathbb{R}$:

a) $|5x|$ c) $|2x + 4|$ e) $|4x - 16|$ g) $|-7x - 35|$

b) $|-3x|$ d) $|-x + 7|$ f) $|x^2 - 4|$

2. Gráfico da função modular

Definição:

Função modular é toda função f, de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = |x|$ ou $y = |x|$.

O *gráfico da função modular* pode ser obtido de dois modos.

1º modo: a partir da definição de módulo.

2º modo: por simetria em relação ao eixo x.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Esboce o gráfico de $y = |x + 1|$.

Resolução:

1º modo: Aplicando a definição de módulo: se $x + 1$ é *positivo* ou *zero*, conservamos o sinal.

$$x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -1$$

Então $|x + 1| = x + 1$ se $x \geqslant -1$

se $x + 1$ é *negativo*, troca-se o sinal.

$$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

Então $|x + 1| = -x - 1$ se $x < -1$

Assim, temos:

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 \text{ se } x \geqslant -1 \quad \text{(I)} \\ -x - 1 \text{ se } x < -1 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

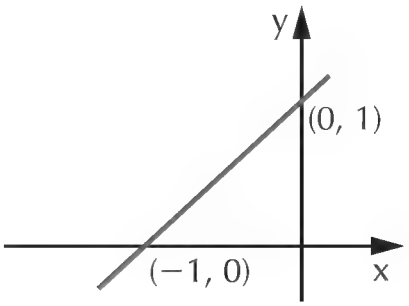
Substituímos x por -1, e por valores maiores que -1 na equação (I):

$y = x + 1$

se $x = -1$, então $y = -1 + 1 = 0 \Rightarrow$ *ponto (−1, 0)*

se $x = 0$, então $y = 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ *ponto (0 , 1)*

Marcamos os pontos obtidos no plano cartesiano, traçando uma semi-reta com origem no ponto $(-1, 0)$:

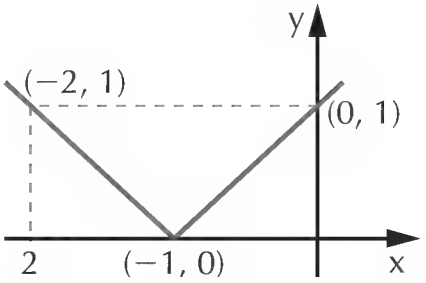


Atribuímos a *x* valores menores que -1, substituindo na função (II):

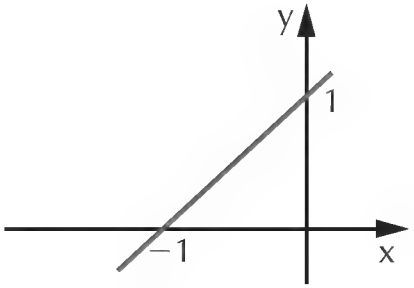
$y = -x - 1$

se $x = -2$, então $y = -(-2) - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ *ponto (−2, 1)*

Marcamos este ponto no plano cartesiano, unindo-o ao ponto $(-1, 0)$:

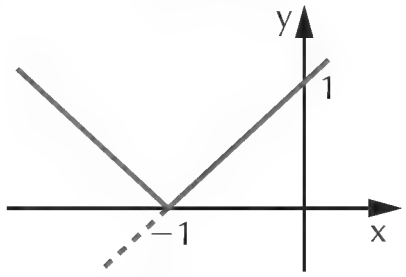


2º modo: Queremos o gráfico de $y = |x + 1|$, para isto traçamos o gráfico de $y = x + 1$:

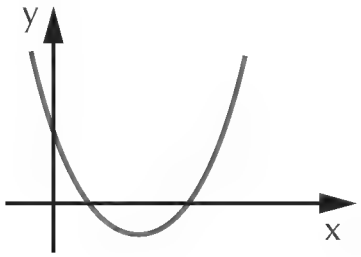


Como o módulo de um número é sempre positivo, os pontos abaixo do eixo x, onde y é negativo, não pertencem ao gráfico de $|x + 1|$.

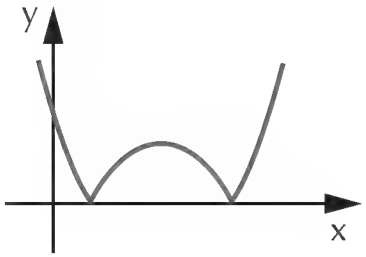
Tomamos, então, pontos simétricos em relação ao eixo x ou, em outras palavras, "rebatemos" o gráfico. Observe ao lado:



2. Dado o gráfico de f(x) esboce o gráfico de $|f(x)|$.



Resolução: Quando não conhecemos a função mas temos o gráfico, é mais fácil "rebater" os pontos abaixo do eixo x.



EXERCÍCIO PROPOSTO

3. Esboce o gráfico das seguintes funções modulares:

a) $y = |x + 3|$

b) $y = |- x + 5|$

c) $y = \left|\frac{x}{2} - 4\right|$

d) $y = |3x - 15|$

3. Equações modulares

Para resolver equações modulares, utilizamos basicamente a definição de módulo. Sempre que tivermos uma função modular, devemos considerar que, dependendo do valor da incógnita, o valor numérico da função (entre as barras do módulo) poderá ser positivo ou negativo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva a equação $|2x| = 14$.

Resolução: Se o módulo de 2x é 14, então a função $y = 2x$ pode ser 14 ou −14, pois:

$|14| = 14$ e $|-14| = 14$

Então:

$2x = 14 \Rightarrow x = 7$ ou $2x = -14 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow S = \{-7, 7\}$

2. Resolva a equação $|-2x + 1| = \frac{1}{2}$.

Resolução: Como $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ou $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, então:

$$-2x + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ ou } -2x + 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$$

3. Resolva a equação $|x^2| + |x| - 12 = 0$.

Resolução: Observe que, neste exercício, temos uma equação do 2º grau onde a incógnita é $|x|$. Para facilitar a resolução, podemos utilizar uma mudança de variável, substituindo $|x|$, por exemplo, por m, então $|x| = m$.

Em função de m, temos a seguinte equação:

$$m^2 + m - 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 \Rightarrow = 49 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\Delta} = 7$$

$$m = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} m_1 = -\frac{1+7}{2} = 3 \\ m_2 = -\frac{1-7}{2} = -4 \end{cases}$$

Agora que temos os valores de m, podemos calcular $|x|$.

Como $|x| = m$, então:

$$|x| = 3 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

ou

$|x| = -4 \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}$, pois o módulo de 1 número é sempre positivo.

$$S = \{-3, 3\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|3x| = 12$
b) $|-5x| = 20$
c) $|-x + 4| = 11$
d) $|2x - 7| = 5$
e) $|3x - 1| = -3$
f) $|-4x + 9| = 3$
g) $|9x + 8| = -5$
h) $|-6x + 2| = 16$

5. Resolva as equações em $\mathbb{R}$:

a) $|x|^2 - 9|x| + 14 = 0$
b) $|x|^2 - 8|x| - 9 = 0$
c) $|x|^2 - 11|x| + 30 = 0$
d) $|x|^2 + 2|x| - 3 = 0$
e) $|x|^2 + 9|x| + 8 = 0$

4. Inequações modulares

As inequações modulares se caracterizam pela presença de um dos sinais de desigualdade: $>$, $\geqslant$, $<$ ou $\leqslant$. Observe a resolução dos exercícios seguintes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $|x| \geqslant 5$.

Resolução: Vamos analisar os intervalos com extremidades em -5 e 5. Observe que, como o sinal de desigualdade é $\geqslant$, os pontos -5 e 5 são representados com uma bolinha preta:

Substituindo x por -5 e por números menores que -5, temos:

se $x = -7$, então $|x| = 7$, portanto maior ou igual a 5;

se $x = -6$, então $|x| = 6$, portanto maior ou igual a 5;

se $x = -5$, então $|x| = 5$, portanto maior ou igual a 5.

Concluímos que os valores menores ou iguais a -5 satisfazem a inequação $|x| \geqslant 5$.

Substituindo x por 5 e por números maiores que 5, temos:

se $x = 5$, então $|x| = 5$, portanto maior ou igual a 5;

se $x = 6$, então $|x| = 6$, portanto maior ou igual a 5;

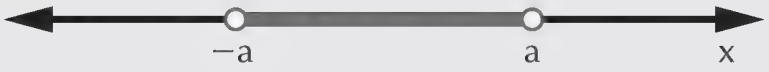
se $x = 7$, então $|x| = 7$, portanto maior ou igual a 5.

Portanto, valores de x maiores ou iguais a 5 satisfazem a inequação $|x| \geqslant 5$.

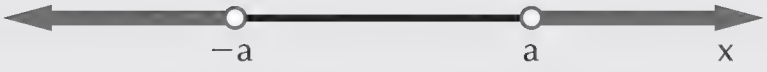
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x \geqslant 5\}$$

De modo geral, se *a* é um número positivo, então:

Propriedade 1: $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

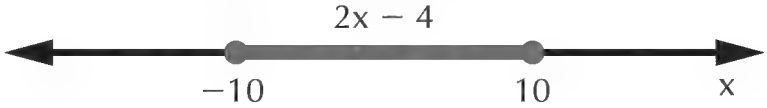


Propriedade 2: $|x| > a \Rightarrow x < -a$ ou $x > a$



2. Resolva a inequação $|2x - 4| \leqslant 10$.

Resolução: Inicialmente, procedemos como nos exercícios anteriores, aplicando a propriedade 1:



$$-10 \leqslant 2x - 4 \leqslant 10$$

Porém, precisamos determinar x. Para isto, utilizamos propriedades operatórias de modo a isolar x no termo central da inequação: $-10 \leqslant 2x - 4 \leqslant 10$

Somamos 4 nos três membros da inequação

$-10 + 4 \leqslant 2x - \cancel{4} + \cancel{4} \leqslant 10 + 4 \Rightarrow -6 \leqslant 2x \leqslant 14$

dividimos por 2:

$$-\frac{6}{2} \leqslant \frac{2x}{2} \leqslant \frac{14}{2} \Rightarrow -3 \leqslant x \leqslant 7$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 7\}$$

3. Resolva a inequação $|x + 7| > -3$.

Resolução: Nos exercícios anteriores, tínhamos números positivos no segundo membro das inequações. Neste exercício, temos um número negativo (-3).

Devemos portanto analisar para obter a solução.

Queremos determinar um conjunto de valores para x que, quando substituídos em $|x + 7|$, forneçam resultados maiores que -3. Por definição, o módulo de um número é sempre positivo, então, para qualquer x, temos que $|x + 7|$ será positivo e, neste caso, será maior que -3.

O conjunto-solução é, portanto: $S = \mathbb{R}$

4. Determine os valores de x que satisfazem a inequação: $|3x - 4| \leqslant -1$.

Resolução: Novamente, temos um número negativo (-1) *no segundo membro da inequação.*

Analogamente ao exercício anterior, como $|3x - 4|$ é positivo qualquer que seja o valor de x, então não é possível ser menor que um número negativo. Neste caso, o conjunto solução é vazio:

$$S = \varnothing$$

De modo geral, se *m é um número negativo*, então:

$$|x| > m \Rightarrow \forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow S = \mathbb{R}$$

$$|x| < m \Rightarrow \nexists\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow S = \varnothing$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

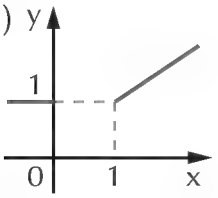
6. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:

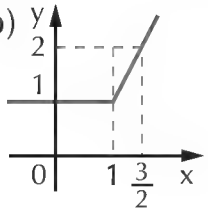
a) $|x| \geqslant 12$
b) $|x| < 7$
c) $|4x + 7| \leqslant 5$
d) $|-9x + 1| > 26$
e) $|-2x - 4| \geqslant 16$
f) $|10x + 4| \geqslant -5$
g) $|7x - 3| < -1$
h) $|-8x + 10| \geqslant 6$
i) $|-12x| > -7$
j) $|-x + 3| < -9$

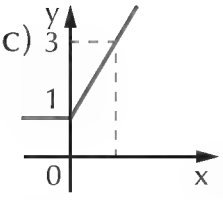
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

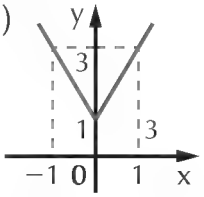
7. (PUC-SP) Para definir o módulo de um número real x podemos dizer que:
   a) é igual ao valor de x se x é real.
   b) é o maior valor do conjunto formado por x e o oposto de x.
   c) é o valor de x tal que $x \in \mathbb{N}$.
   d) é o oposto do valor de x.
   e) é o maior inteiro contido em x.

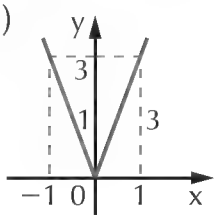
8. (UFAL) O gráfico da função f, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x| + x + 1$, é

a)


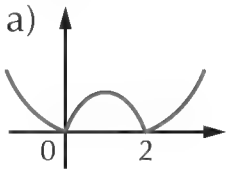
b)


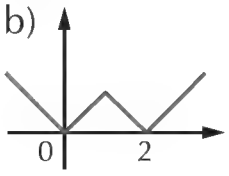
c)


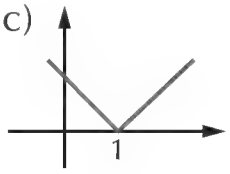
d)


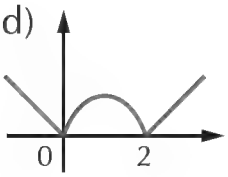
e)


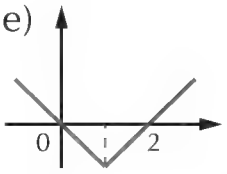
9. (UFPI) O gráfico que mais se assemelha ao de $f(x) = ||x - 1| - 1|$ é

a)


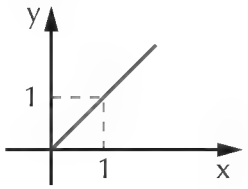
b)


c)


d)


e)


10. (UFPA) A função cujo gráfico aparece abaixo



a) tem domínio $\mathbb{R}$
b) tem conjunto imagem $\mathbb{R}_+^*$
c) é definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$

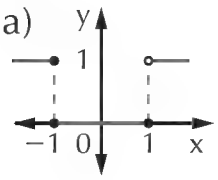
d) é definida por $f(x) = |x|$, $x \geqslant 0$

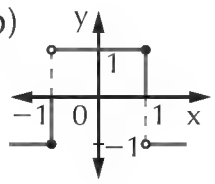
e) é definida por $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $x > 0$

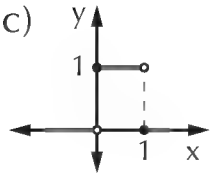
11. (UFPB) O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

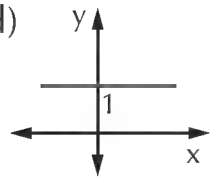
$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \notin [0, 1] \\ |1 - x| + |x|, \text{ se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

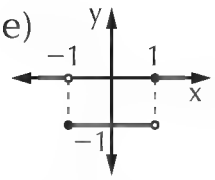
é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

12. (FGV-SP) A soma das raízes da equação $|5x - 1| = 6$ é:

a) 0 b) $\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{2}{5}$

d) $\dfrac{3}{5}$ e) $\dfrac{4}{5}$

13. (ITA-SP) Sabendo que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, podemos afirmar que:

a) $a = 1$ e $b = 6$.

b) $a = 0$ e $b = -6$.

c) $a = 1$ e $b = -6$.

d) $a = 0$ e $b = -9$.

e) não existem a e b tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha todas as raízes da equação.

14. (FGV-SP) Quantos números inteiros não-negativos satisfazem a inequação $|x - 2| < 5$?

a) infinitos d) 6

b) 4 e) 7

c) 5

15. (FEI-SP) Se $|2x - 1| \geqslant 3$, então:

a) $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$.

b) $x \geqslant 3$.

c) $x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

d) $x \leqslant 0$.

e) $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

16. (UFG-GO) O conjunto-solução da inequação $\left|\dfrac{2x+4}{x-2}\right| \leqslant 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} -2 < x < 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

Capítulo 4

Função Exponencial

Ao longo da história da matemática, o homem sempre procurou meios que facilitassem os cálculos. Na antigüidade, os matemáticos procuravam construir tabelas para simplificar a aritmética, mais especificamente para cálculos com potências. Utilizando essas tabelas, obtinham resultados cada vez mais precisos. Os primeiros registros sobre potências datam de 1000 a.C., porém somente no século XVII encontramos a notação de potências que utilizamos hoje.

Revisão de potenciação e radiciação

Sejam a e b bases reais e diferentes de zero e m e n expoentes inteiros, temos:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$a^o = 1$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

onde $a \in \mathbb{R}_+^*$, $n \geq 2$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

1. Equação exponencial

A equação exponencial caracteriza-se pela presença da incógnita no expoente. Exemplos:

$2^x = 32$ $\qquad$ $3^x + 3^{x+1} - 3^{x-2} = \frac{11}{9}$

$3^{x+1} = 243$ $\qquad$ $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 3 = 0$

$5^{-x^2+4} = 125$

Para resolver estas equações, além das propriedades de potências, utilizamos a seguinte propriedade:

Se duas potências são iguais, tendo as bases iguais, então os expoentes são iguais:

$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva as equações em $\mathbb{R}$:

a) $2^x = 32$

Resolução: Como $32 = 2^5$, fazemos a substituição na equação. Observe que, ao reduzir os dois membros da igualdade à mesma base (2), podemos igualar os expoentes:

$$2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{5\}$$

b) $3^{x+1} = 243$

Resolução: Procedemos da mesma forma que no item anterior; substituindo 243 por 3^5, reduzimos os dois membros da equação à base 3, igualamos os expoentes e encontramos o valor de *x*:

$$3^{x+1} = 243 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^5 \Rightarrow x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{4\}$$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x+3}$

Resolução: Podemos "inverter" uma das frações, lembrando de "trocar" o sinal do expoente. Procedendo deste modo, podemos obter potências com bases iguais nos dois membros da equação:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x+3} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{2x+3}$$

Portanto,

$$x + 1 = 2x - 3 \Rightarrow x - 2x = -3 - 1 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{4\}$$

2. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação exponencial:

$$3^x + 3^{x+1} - 3^{x-1} = \frac{11}{9}$$

Resolução: Observe que esta equação é diferente das anteriores, pois no primeiro membro há três termos.

Adotamos um processo próprio para resolvê-la.

A exponencial cujo expoente é $x + 1$ pode ser desmembrada utilizando-se a propriedade do produto de potências com bases iguais.

Analogamente, a exponencial que tem expoente $x - 1$ é desmembrada utilizando-se o quociente de potências de bases iguais. Observe:

$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$ (conservar a base e somar os expoentes)

$3^{x-1} = \frac{3^x}{3^1}$ (conservar a base e subtrair os expoentes)

Substituímos na equação dada:

$$3^x + 3^{x+1} - 3^{x-1} = \frac{11}{9} \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 - \frac{3^x}{3} = \frac{11}{9}$$

Como 3^x é fator comum, faremos uma *mudança de variável* para visualizar melhor a equação. Por exemplo, seja:

$$3^x = t \Rightarrow t + 3t - \frac{t}{3} = \frac{11}{9} \Rightarrow 4t - \frac{t}{3} = \frac{11}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{36t - 3t}{9} = \frac{11}{9} \Rightarrow 33t = 11 \Rightarrow t = \frac{11}{33} \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

Como $3^x = t$, temos $3^x = \frac{1}{3}$

$$3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow S = \{-1\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $4^x = 16$ c) $7^x = 343$ e) $3^{-\frac{x}{2}+1} = \frac{1}{3}$

b) $8^x = 32$ d) $5^{x^2-12} = \frac{1}{125}$ f) $\sqrt[5]{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}$

2. Resolva as equações exponenciais em $\mathbb{R}$:

a) $2^x + 2^{x+2} - 2^{x+3} = -24$ c) $2 \cdot 3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} = 72$

b) $5^x + 5^{x+1} - 5^{x-1} = 29$

3. Determine o valor de *x* nas equações exponenciais:

a) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ c) $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$

b) $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ d) $2^{2x} + 6 \cdot 2^x + 5 = 0$

4. (FEI-SP) Resolva $\frac{4^x + 4}{5} = 2^x$.

2. Gráficos da função exponencial

A função exponencial *f*, de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$, é definida por $y = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

São exemplos de funções exponenciais:

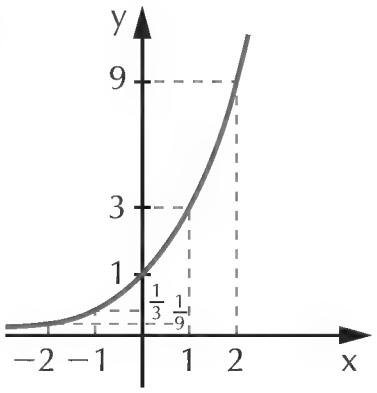
$y = 2^x$ $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ $y = \pi^x$ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

2.1 Gráfico da função exponencial

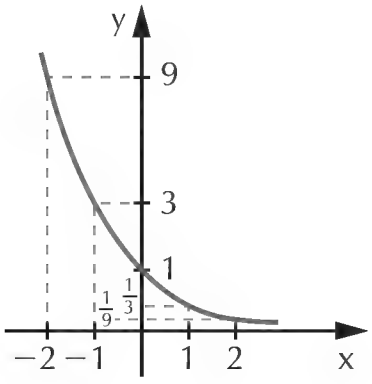
Vamos construir os gráficos de duas funções exponenciais: $y = 3^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

a) Considere a função $y = 3^x$. Vamos atribuir valores a x, calcular y e a seguir construir o gráfico:

x	$y = 3^x$
−2	1/9
−1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27



b) Vamos, agora, construir o gráfico da exponencial $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$:



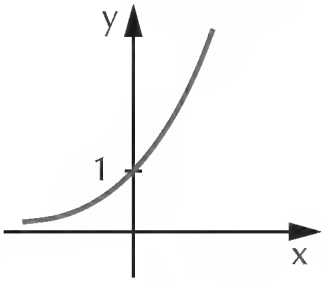
x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−2	9
−1	3
0	1
1	1/3
2	1/9

Observando as funções anteriores, podemos concluir que para $y = a^x$:

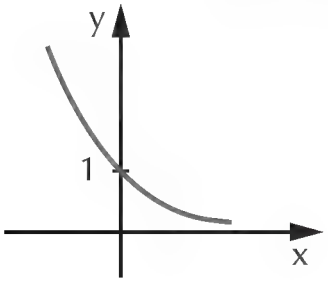
- se $\mathbf{a > 1}$, a função exponencial é *crescente;*
- se $\mathbf{0 < a < 1}$, a função é *decrescente.*

Graficamente temos:

$a > 1 \Rightarrow$ *exponencial crescente*



$0 < a < 1 \Rightarrow$ *exponencial decrescente*



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Classifique as funções exponenciais em crescente ou decrescente.

a) $y = 2^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $y = \pi^x$ d) $= \left(\frac{2}{5}\right)^x$ e) $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

Resolução:

a) Como $a = 2$, a função é crescente.

b) Como $a = \frac{1}{2}$, portanto $0 < a < 1$, e a função é decrescente.

c) Sabendo que $\pi \simeq 3{,}14$, portanto a é maior que 1, e a função é crescente.

d) Como $a = \frac{2}{5}$ e $0 < \frac{2}{5} < 1$, a função é decrescente.

e) Como $a = \frac{5}{2} = 2{,}5$, a função é crescente.

2. Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que a função abaixo seja crescente:

$y = \left(-\frac{a}{2} + 3\right)^x$

Resolução: A condição para que a função exponencial seja crescente é que a base seja maior que 1. Então:

$$-\frac{a}{2} + 3 > 1 \Rightarrow -\frac{a}{2} > -2 \quad (-1) \Rightarrow \frac{a}{2} < 2 \Rightarrow a < 4$$

3. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que a função abaixo seja decrescente:

$$f(x) = \left(\frac{m}{4} + 7\right)^{x+1}$$

Resolução: Para que a função seja decrescente, a base da exponencial deve ser um número entre 0 e 1. Portanto:

$$0 < \frac{m}{4} + 7 < 1 \Rightarrow 0 - 7 < \frac{m}{4} + \cancel{7} - \cancel{7} < 1 - 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7 < \frac{m}{4} < -6 \Rightarrow -7 \cdot 4 < \frac{m}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} < -6 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -28 < m < -24$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. Classifique as funções exponenciais em crescente ou decrescente:

a) $y = 7^x$ c) $y = 12{,}1^x$ e) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

b) $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ d) $y = \left(\frac{12}{5}\right)^x$ f) $y = \left(\frac{10}{11}\right)^x$

6. Determine $a \in \mathbb{R}$ para que cada uma das funções abaixo seja crescente:

a) $y = (2a + 12)^x$ b) $y = (-3a + 4)^x$ c) $f(x) = \left(\frac{a}{5} - 7\right)^x$

7. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que cada uma das funções abaixo seja decrescente:

a) $f(x) = \left(\frac{k}{3} + 9\right)^x$ b) $f(x) = (-k + 5)^x$ c) $y = (7k - 63)^x$

APLICAÇÃO PRÁTICA

Tempo de desintegração radioativa

Conhecer a rapidez com que um radioisótopo se desintegra é muito importante, por exemplo, para aplicações práticas na medicina nuclear ou para saber por quanto tempo o lixo nuclear deve ficar estocado até que não represente mais perigo.

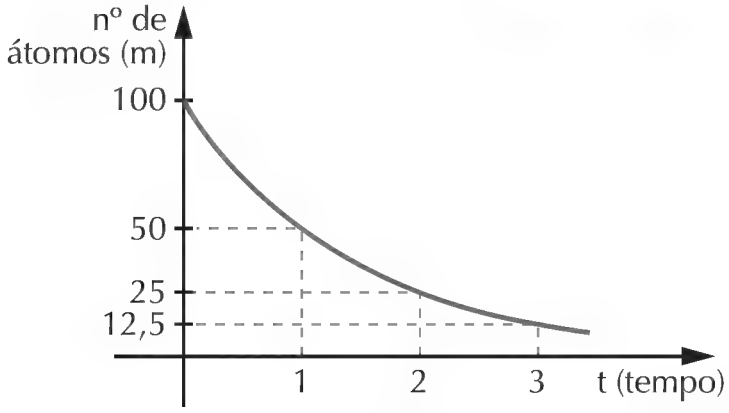
A forma mais comumente usada para medir a rapidez de desintegração é a seguinte:

Tempo de meia-vida ($t_{1/2}$) ou período de semidesintegração (P) é o tempo necessário para desintegrar metade dos átomos radioativos existentes em uma determinada amostra.

Seja, por exemplo, uma amostra radiotiva com $m_0 = 100$ átomos radioativos que se desintegra de acordo com a seguinte relação:

$$m = m_0 \cdot 2^{-t}$$

t = tempo em horas; m = átomos radioativos restantes



tempo h	m (átomos)
0	100
1	50
2	25
3	12,5
⋮	⋮

Neste caso, o tempo de meia-vida é de 1 hora. A curva obtida é chamada de curva de decaimento do elemento radioativo e também fornece sua velocidade de desintegração.

(Feltre, 2000)

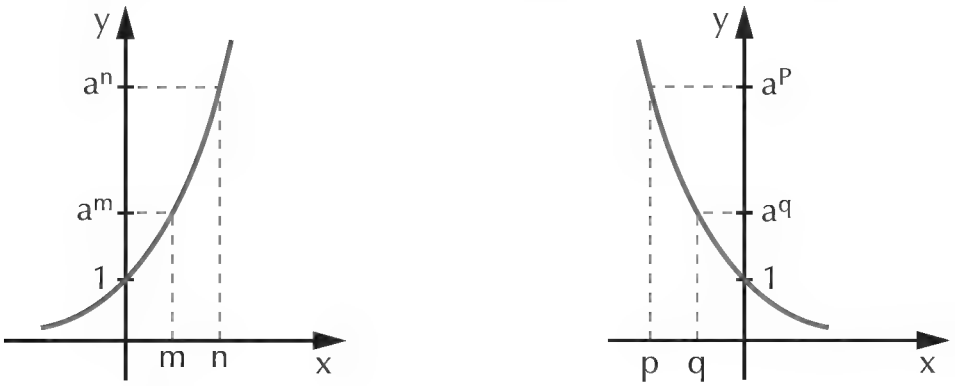
3. Inequação exponencial

A inequação exponencial caracteriza-se pela presença da incógnita no expoente e de um dos sinais de desigualdade: $>$, $<$, $\geqslant$ ou $\leqslant$. São exemplos de inequações exponenciais:

$3^x < 9$ $\qquad$ $2^{x+4} \geqslant 32$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+1} < \left(\frac{5}{2}\right)^3$

Antes de resolvê-las, vamos analisar os gráficos abaixo.

f(x) é crescente $\Rightarrow a > 1$ f(x) é decrescente $\Rightarrow 0 < a < 1$



Observando o gráfico, temos que:

- na *função crescente*, conservamos o sinal da desigualdade para comparar os expoentes:

$$a^n > a^m \Leftrightarrow n > m$$
$$a^m < a^n \Leftrightarrow m < n$$

- na *função decrescente*, "invertemos" o sinal da desigualdade para comparar os expoentes:

$$a^p > a^q \Leftrightarrow p < q$$
$$a^q < a^p \Leftrightarrow q > p$$

Desde que as bases sejam iguais.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva as inequações:

a) $2^x > 32$

Resolução: Para comparar os expoentes, é necessário reduzir os dois membros da inequação à mesma base, lembrando que $2^5 = 32$. Temos:

$$2^x > 32 \Rightarrow 2^x > 2^5$$

Como $a = 2$ (função crescente), conservamos o sinal:

$$x > 5 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} \leqslant \frac{8}{27}$

Resolução: Substituímos $\frac{8}{27}$ por $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ reduzindo os dois membros à mesma base:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Como $0 < \frac{2}{3} < 1$ (função decrescente), invertemos o sinal:

$$x \geqslant 3 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$$

c) $16^{x+1} \geqslant 64^{x-1}$

Resolução: Observe que 16 e 64 são potências de base 2, então:

$$16^{x+1} = (2^4)^{x+1} = 2^{4x+4}$$
$$64^{x-1} = (2^6)^{x-1} = 2^{6x-6}$$

Substituindo na inequação, temos:

$$16^{x+1} \geqslant 64^{x-1}$$
$$2^{4x+4} \geqslant 2^{6x-6}$$

Como $a = 2 > 1$ (função crescente), conservamos o sinal:

$4x + 4 \geqslant 6x - 6 \Rightarrow 4x - 6x \geqslant -6 - 4 \Rightarrow -2x \geqslant -10 \cdot (-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x \leqslant 10 \Rightarrow x \leqslant \frac{10}{2} \Rightarrow x \leqslant 5 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\}$

d) $2^{x-1} > \sqrt[3]{16}$

Resolução: Lembre que toda raiz pode ser transformada em potência, então:

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$$

Substituindo, temos:

$$2^{x-1} > 2^{\frac{4}{3}}$$

Então,

$$x - 1 > \frac{4}{3} \Rightarrow x > \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow x > \frac{4+3}{3} \Rightarrow x > \frac{7}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{3}\}$$

e) $0{,}1^{x-2} \leqslant 0{,}0001$

Resolução: Os números decimais podem ser transformados em frações onde o denominador é uma potência de base 10. Temos então:

$$0{,}1^{x-2} \leqslant 0{,}0001 \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^{x-2} \leqslant \left(\frac{1}{10}\right)^{4}$$

Como $0 < \frac{1}{10} < 1$, invertemos o sinal de desigualdade:

$$x - 2 \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 6 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 6\}$$

2. Resolva a inequação exponencial:

$2^{x+2} - 2^{x-1} + 2^{x} \leqslant 18$

Resolução: Neste exercício, o primeiro membro da inequação é composto por três exponenciais, portanto, deve-se aplicar outro método de resolução. Inicialmente utilizamos as propriedades de potências:

$$2^{x+2} = 2^{x} \cdot 2^{2} = 4 \cdot 2^{x} \qquad 2^{x-1} = \frac{2^{x}}{2^{1}} = \frac{2^{x}}{2}$$

Substituindo, temos:

$$2^{x+2} - 2^{x-1} + 2^{x} \leqslant 18 \Rightarrow 4 \cdot 2^{x} - \frac{2^{x}}{2} + 2^{x} \leqslant 18$$

Façamos uma mudança de variável:

$$2^{x} = t$$

Então:

$$4t - \frac{t}{2} + t \leqslant 18 \Rightarrow \frac{8t - t + 2t}{2} \leqslant \frac{36}{2} \Rightarrow 9t \leqslant 36 \Rightarrow t \leqslant 4$$

Como $2^{x} = t$ e $t \leqslant 4$, temos que:

$$2^{x} \leqslant 4 \Rightarrow 2^{x} \leqslant 2^{2} \Rightarrow x \leqslant 2 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R}\ x \mid \leqslant 2\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações exponenciais:

a) $3^x < 81$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 243$

c) $0{,}1^{x+4} < 0{,}001$

d) $25^x < 625$

e) $2^{x+1} \geqslant \sqrt[5]{64}$

f) $7^{-x+1} < \frac{1}{343}$

g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+9} < \left(\frac{4}{3}\right)^5$

h) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \geqslant \frac{32}{243}$

9. (UFPI) Seja S o conjunto-solução de $\left(\frac{5}{3}\right)^{-x+2} > \left(\frac{3}{5}\right)^{1-2x}$. Então

a) $S = \mathbb{R}^*$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

10. (PUC-SP) Determine x tal que $\frac{1}{8} \leqslant 2^{-x}$.

11. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} > 165$

b) $2^{x-1} + 2^x - 2^{x+1} \leqslant -\frac{1}{8}$

c) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 > 0$

12. (UFRGS-RS) O conjunto-solução da inequação $3^{2-x} + 3^{2+x} > 18$, é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

13. (Ufac) A quantidade de números inteiros n que satisfazem a desigualdade $\frac{1}{8} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 8$ é igual a:

a) 1 b) 3 c) 4 d) 6 e) 7

O número *e*

O número e tem grande importância em diversos ramos das ciências, pois está presente em vários fenômenos naturais, como, por exemplo:

- no crescimento populacional;
- no crescimento de populações de bactérias;
- na desintegração radioativa.

Na área de Economia, é aplicado no cálculo de juros.

Foi o matemático inglês John Napier (1550 -1617) o responsável pelo desenvolvimento da teoria logarítmica utilizando o número e como base. O número e é irracional, ou seja, não pode ser escrito sob forma de fração, e vale:

$$e = 2{,}71828182...$$

Como o número *e* é encontrado em diversos fenômenos naturais, a função $f(x) = e^x$ é considerada uma das mais importantes da matemática, merecendo atenção especial de cientistas de diferentes áreas do conhecimento humano.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva a equação $e^{2x} - e^{x+1} = 0$

Resolução: Resolvemos, como qualquer outra função exponencial, aplicando as propriedades de potências conhecidas:

$$e^{2x} - e^{x+1} = 0 \Rightarrow (e^x)^2 - e^x \cdot e = 0$$

Seja $e^x = t \Rightarrow t^2 - e \cdot t = 0$

Colocamos *t* em evidência para determinar as raízes:

$t \cdot (t - e) = 0$

$t = 0$ ou $t - e = 0 \Rightarrow t = e$

Como $e^x = t$, temos $\begin{cases} e^x = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \\ e^x = e \Rightarrow e^x = e^1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

$S = \{1\}$

2. Uma substância radioativa desintegra-se de modo que, no instante *t*, a quantidade *não desintegrada* é:

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-et}$$

Qual o valor de *t* para que metade da quantidade inicial de átomos radioativos, m_0, se desintegre?

Resolução: Queremos calcular o tempo *t* para que $m(t) = \frac{m_0}{2}$.

Substituímos este valor de m(t) na fórmula dada:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 \cdot 2^{-et} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-et}$$

Como as bases são iguais, podemos igualar os expoentes:

$$-et = -1 \Rightarrow et = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{e}$$

Como *e* vale aproximadamente 2,7 ($e \simeq 2,7$), temos:

$$t \simeq \frac{1}{2,7} \Rightarrow t \simeq 0,37$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

14. (PUC-SP) Sobre a função $t(x) = e^x$ definida em $\mathbb{R}$, podemos afirmar que:
a) tem um único zero no intervalo [0, 2]
b) $e^x < a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}_+^*$
c) $e^x > a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}_+^*$
d) assume valores de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$
e) assume valores apenas em $\mathbb{R}_+$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

15. (UFMS) Calcular *x* na igualdade:

$$\left(\frac{1}{0,125}\right)^0 \cdot (0,5)^{2x} = (0,25)^{84-x}$$

16. (UFRR) Seja *x* a raiz da equação $(0,1)^{x-5} = 10$. Calcule o valor de 10x.

17. (UFSC) O valor de *x* que satisfaz a equação:

$$\frac{5^{4x-12}}{5^{3x+8}} = \frac{1}{125}$$ é:

18. (Ufes) Se $9^x - 9^{x-1} = 216$, então $(2x)^x$ é igual a:
a) 3 c) 9 e) $25\sqrt{5}$
b) $3\sqrt{3}$ d) 25

19. (Mackenzie-SP) A solução da equação $\left(\frac{9}{16}\right)^{x-3} = \left(\frac{12}{9}\right)^x$ é é um número racional *x*, tal que:
a) $-1 \leqslant x < 0$ d) $2 \leqslant x < 3$
b) $0 \leqslant x < 1$ e) $3 \leqslant x < 4$
c) $1 \leqslant x < 2$

20. (UFPA) Se V é o conjunto-solução da equação $2^x + \frac{4}{2^x} = 5$, então:

a) $V = \{1, 4\}$ d) $V = \{1, 2\}$
b) $V \subset \mathbb{Z}_+^*$ e) $V \supset \{0\}$
c) V é unitário

21. (UFPI) Se $2^{x+1} - 2^{3-x} = 6$, então $x^2 + 20$ é igual a:

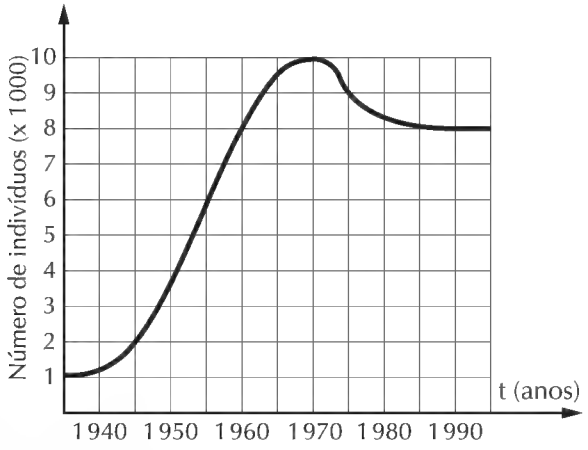
a) 20 c) 24 e) 36
b) 21 d) 29

22. (UFMS) Calcule o valor de *x* que satisfaz a equação $9^x = 729\sqrt{3^x}$.

23. (FGV-SP) Se *x* é raiz da equação: $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = \frac{13}{27}$, então x^{-1} vale:

a) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$ e) $-\frac{1}{2}$
b) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

24. (Enem-MEC) O número de indivíduos de certa população é representado pelo gráfico abaixo.



Em 1975, a população tinha um tamanho aproximadamente igual ao de:

a) 1960 c) 1967 e) 1980
b) 1963 d) 1970

25. (UFMS) Dada a função $y = f(x) = a^x$, com $a > 0$, $a \neq 1$, determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).

01. O domínio da função f é $\mathbb{R}$.
02. A função f é crescente em seu domínio quando $0 < a < 1$.
04. Se $a = 2$, então $f(-1) = \frac{1}{2}$.
08. O gráfico de f passa pelo ponto P (0, 1).
16. Se $a = \frac{1}{3}$ e $f(x) = 243$, então $x = -81$.

26. (FGV-SP) Com relação à função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, podemos afirmar que:

a) é crescente em todo o domínio;
b) é crescente somente no intervalo $[-\infty ; 0]$;
c) é decrescente em todo domínio;
d) é decrescente somente no intervalo $[0, \infty]$;
e) o gráfico intercepta o eixo das abscissas.

Capítulo 5

Função Logarítmica

Durante o Renascimento, com o advento da astronomia e das grandes navegações, foi necessário simplificar os cálculos, transformando multiplicações e divisões em somas ou subtrações.

A idéia inicial é simples. Suponha, por exemplo, que se queira determinar o valor de x tal que: $10^x = 5$

O que faziam os matemáticos era encontrar um valor aproximado de x, em geral um número irracional, tal que fosse verdadeira a igualdade? Procediam da mesma forma para outras equações exponenciais e tabelavam os valores determinados. Quando necessário, bastava consultar a tabela.

Por mais de dois séculos, as tabelas logarítmicas representaram um poderoso instrumento de cálculo e somente deixaram de ser utilizadas com a invenção das calculadoras eletrônicas. Por outro lado, ainda hoje a teoria logarítmica tem importância fundamental no estudo das ciências, onde surgem os *logaritmos naturais*. A base destes logaritmos é o número e e foram tabelados por Neper, por isso são também conhecidos por *logaritmos neperianos*. Os logaritmos naturais são utilizados, por exemplo, para calcular crescimento populacional, taxas de juros de aplicações financeiras, desintegração radioativa etc.

1. Logaritmo

O logaritmo de um número *b*, na base *a*, onde *a* e *b* são positivos e *a* é diferente de um, é um número *x*, tal que *x* é o expoente de *a* para se obter *b*, então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \text{ sendo } b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

em que: *b* é chamado de *logaritmando*

a é chamado de *base*

x é o *logaritmo*

Conclui-se que:

a) se $2^4 = 16$, então 4 é o logaritmo de 16 na base 2, ou:

$\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$

b) se $9^2 = 81$, então 2 é o logaritmo de 81 na base 9, ou:

$\log_9 81 = 2 \Leftrightarrow 9^2 = 81$

Em particular, observe que: sendo $2^1 = 2$, portanto $\log_2 2 = 1$

De maneira geral,

$$\log_a a = 1, \text{ sendo } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Observação

Nos *logaritmos decimais*, ou seja, aqueles em que a base é 10, esta freqüentemente é omitida. Por exemplo:

logaritmo de 2 na base 10; notação: log 2

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log_2 32$

Resolução: Chamamos de *x* o logaritmo e aplicamos a definição:

$$\log_2 32 = x \Leftrightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$$

b) $\log_{25} \sqrt{5}$

Resolução: Chamamos de *x* o logaritmo e aplicamos a definição. Resolvemos a exponencial obtida recorrendo às propriedades:

$$\log_{25} \sqrt{5} = x \Leftrightarrow 25^x = \sqrt{5} \Rightarrow (5^2)^x = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$5^{2x} = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule o valor numérico dos seguintes logaritmos:

a) $\log_2 128$ c) $\log_7 343$ e) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4}$ g) $\log_4 2\sqrt{2}$

b) $\log_4 64$ d) $\log_3 \frac{1}{81}$ f) $\log_{49} \sqrt{7}$ h) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{81}{625}$

2. Propriedades decorrentes da definição

Domínio (condição de existência)

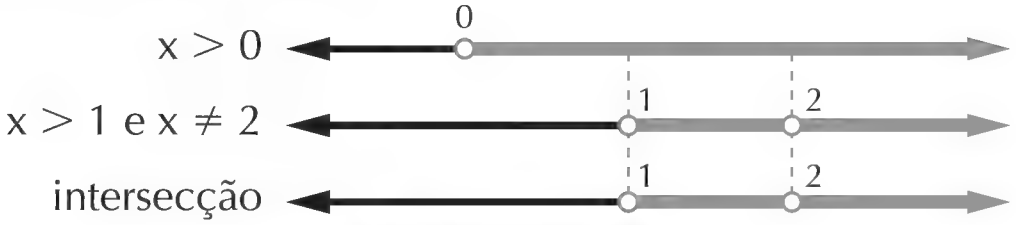
Segundo a definição, o logaritmando e a base devem ser positivos, e a base deve ser diferente de 1. Portanto, sempre que encontramos incógnitas no logaritmando ou na base devemos garantir a existência do logaritmo. Observe o procedimento no exemplo seguinte:

$$\log_{x-1} 2x$$

O logaritmando e a base devem ser positivos e a base diferente de 1:

$2x > 0 \Rightarrow x > 0$ e $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ e $x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$

Como existem três condições sobre o valor de *x*, devemos determinar a intersecção



$x > 1$ e $x \neq 2$

Propriedades

$$\log_a a^m = m,\ a > 0 \quad e \quad a \neq 1$$
$$\log_a 1 = 0,\ a > 0 \quad e \quad a \neq 1$$
$$a^{\log_a b} = b,\ b > 0,\quad a > 0 \quad e \quad a \neq 1$$

Veja a seguir a aplicação dessas propriedades nos exercícios resolvidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule:
   a) $2^{\log_2 7}$ b) $\log_4 \log_3 81$

Resolução:

a) Segundo a terceira propriedade:

$$2^{\log_2 7} = 7$$

b) Neste exercício, calculamos o logaritmos, de 81 na base 3, e substituímos na expressão dada:

$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

Portanto: $\log_4 \log_3 81 = \log_4 4 = 1$

2. Calcular o valor de A, sendo:

$$A = \log_3 27 - 2 \log_5 \frac{1}{25} + 4 \log_3 1$$

Resolução: Fatoramos os logaritmandos e aplicamos as propriedades necessárias, calculando o valor numérico de cada logaritmo:

$$A = \log_3 27 - 2 \log_5 \frac{1}{25} + 4 \log_3 1$$
$$A = \log_3 3^3 - 2 \log_5 \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 4 \cdot 0$$
$$A = 3 - 2 \log_5 5^{-2} + 0 \Rightarrow A = 3 - 2 \cdot (-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = 3 + 4 \Rightarrow A = 7$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. Determine as condições de existência dos logaritmos:

a) $\log_2 (x + 3)$ c) $\log_{x+1}(x - 5)$

b) $\log_x (2x - 4)$ d) $\log_x (3x - 1)$

3. Calcule o valor dos logaritmos utilizando as propriedades:

a) $\log_2 64$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$ g) $\log_8 64$ j) $7^{\log_7 20}$

b) $\log_7 343$ e) $\log_5 125$ h) $\log_9 81$ l) $3^{\log_3 9}$

c) $\log_2 1$ f) $2^{\log_2 5}$ i) $\log_7 1$

4. Determine x em cada caso:

a) $\log_4 x = 3$ c) $\log_x 10 = \frac{1}{2}$ e) $\log_3 (x + 1) = 5$

b) $\log_2 \frac{x}{2} = 4$ d) $\log_x \sqrt{3} = -1$

5. Calcule o valor de k, dado:

$k = 3 \cdot \log_4 64 - \frac{1}{2} \cdot \log_5 \sqrt{5} + \log_{10} 0{,}1$

3. Logaritmo decimal — característica e mantissa

A tabela logarítmica foi amplamente utilizada até a invenção da calculadora eletrônica. Mostraremos como proceder para consultar a tabela.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine log 341.

Resolução:

Sabemos que 341 está entre 100 e 1.000:

$10^2 < 341 < 10^3$

Como a característica é o expoente de menor potência de 10, temos que $c = 2$.

Consultando a tabela para 341, encontramos $m = 0{,}53275$. Logo: $\log 341 = 2 + 0{,}53275$

$$\log 341 = 2{,}53275$$

2. Calcule $\log 73$.

Resolução:

Observe que 73 está entre 10 e 100, então:

$10^1 < 73 < 10^2$

Neste caso, $c = 1$.

Consultando a tabale para 73, temos $m = 0{,}86332$.

Portanto: $\log 73 = 1 + 0{,}86332$

$$\log 73 = 1{,}86332$$

3. Calcule $\log 0{,}7$.

Resolução:

Sabendo que 0,7 está entre 0,1 e 1, temos que:

$10^{-1} < 0{,}7 < 10^0$

Então, $c = 1$.

Procuramos na tabela a mantissa para $n = 7$ e encontramos $m = 0{,}84510$. Portanto: $\log 0{,}7 = -1 + 0{,}84510$

$$\log 0{,}7 = -0{,}15490$$

Leia sobre Logaritmos e a escala Richter no Encarte Colorido.

EXERCÍCIO PROPOSTO

6. Determine o valor dos logaritmos utilizando a tabela no final do livro:

a) $\log 237$ c) $\log 93$ e) $\log 53$ g) $\log 419$

b) $\log 0{,}5$ d) $\log 915$ f) $\log 0{,}9$

4. Propriedades operatórias dos logaritmos

$$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n,\ m > 0,\ n > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n,\ m > 0,\ n > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$\log_a m^p = p \cdot \log_a m,\ p \in \mathbb{R},\ m > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Desenvolva admitindo satisfeitas as condições de existência:

$$\log_3 \frac{\sqrt{y}}{x^2 y^3}$$

Resolução:

$$= \log_3 \sqrt{y} - \log_3 x^2 y^3 = \log_3 y^{\frac{1}{2}} - \log_3 x^2 y^3 =$$

$$= \frac{1}{2} \log_3 y - (\log_3 x^2 + \log_3 z^3) = \frac{1}{2} \log_3 y - 2 \log_3 x - 3 \log_3 z$$

2. Sendo $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, calcule o valor de $\log 6$.

Resolução:

$$\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$$

Cologaritmo

$$\operatorname{colog}_a b = -\log_a b, \text{ sendo } b > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Desenvolva admitindo satisfeitas as condições de existência:

a) $\log \frac{m^5 n^2}{\sqrt[3]{p^2}}$ b) $\log \frac{\sqrt{r}}{s^4 t}$

8. Dado que $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$ calcule:

a) $\log 30$ b) $\log 18$ c) $\log 24$

5. Mudança de base

Até o momento, trabalhamos com expressões logarítmicas em que as bases são iguais; para resolver questões que envolvam logaritmo com bases diferentes, utilizamos a seguinte expressão:

$$\log_n m = \frac{\log_a m}{\log_a n}, \text{ sendo } m > 0,\ n > 0,\ n \neq 1,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Simplifique a expressão e determine o valor de A:
$A = \log_3 8 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_2 5$

Resolução:

$A = \log_3 8 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_2 5$

$$A = \frac{\log 8}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 4}} \cdot \frac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 5}} \cdot \frac{\cancel{\log 5}}{\log 2}$$

$$A = \frac{\log 8}{\log 2} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

2. Dados $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, calcule $\log_2 3$.

Resolução:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0{,}477}{0{,}301} \Rightarrow \log_2 3 = 1{,}585$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9. (Fuvest-SP) Sabendo-se que $5^p = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

a) $\frac{2}{p}$ b) $2p$ c) $2 + p^2$ d) $2 + 2p$ e) $\frac{2 + 2p}{p}$

10. (PUC-SP) Se $a = \log_8 225$ e $b = \log_2 15$, então:

a) $a = \frac{2b}{3}$ c) $a \cdot b = \frac{2}{3} \cdot \log_2 15$ e) $b = \frac{a}{3}$

b) $b = \frac{2a}{3}$ d) $a = \frac{b}{3}$

11. (FGV-SP) Sabendo-se que log 2 = m e log 3 = n, podemos afirmar que log 108 vale:

a) $m^2 + n^3$ b) $m^3 + n^2$ c) $2m + 3n$ d) $3m + 2n$ e) $6mn$

Aplicação Prática

A escola de pH

Todos nós, em determinada situação, já comentamos como um suco de determinada fruta estava ácido ou já pedimos em uma farmácia algum "antiácido" para combater dores de estômago.

Na química, existe uma escala desenvolvida pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter L. Sórensen em 1909, chamada de escala de pH, que nos fornece uma ferramenta prática para quantificar o quão ácida ou básica é uma determinada substância.

Para utilizar a escala, é necessário conhecer a concentração de íons de H^+ da solução. Veja o exemplo.

Suco de laranja:

$[H^+] = 1{,}0 \times 10^{-3}$ mol/L

Como $pH = -\log [H^+]$, então

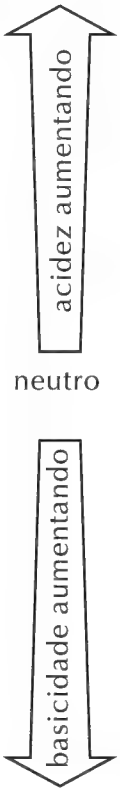
$pH_{\text{suco de laranja}} =$

$= -\log 10^{-3} =$

$= -(-3) \log^{10} = +3$

A escala de pH varia de 0 a 14.

Vejamos na figura a seguir o pH de algumas substâncias.



pH	*Substâncias*
0	
1	Ácido da bateria de um automóvel
2	Suco de limão, suco gástrico
3	Vinagre, suco de laranja
4	Suco de tomate
5	Café, chuva, vinho
6	Leite, saliva
7	Água pura, sangue
8	Xampu, água do mar
9	Bicarbonato de sódio
10	Leite de magnésia, sabão líquido
11	Produto de limpeza com amônia
12	Barrilha
13	Limpa-forno
14	

(Bosquilha,1999)

6. Função logarítmica

Função logarítmica é a função *f*, de domínio $\mathbb{R}^*_+$ e contradomínio $\mathbb{R}$, que associa cada número real e positivo *x* ao logaritmo de *x* na base *a*, onde *a* é um número real, positivo e diferente de 1.

$$f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = \log_a x,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

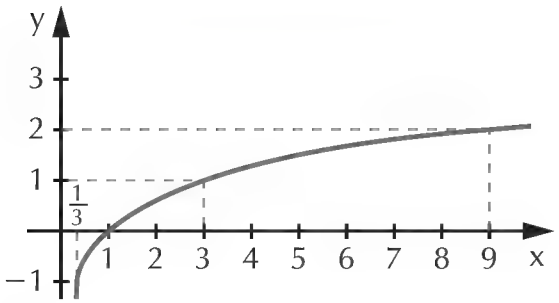
6.1 Gráfico da função logarítmica

Vamos construir o gráfico de duas funções logarítmicas:

a) $y = \log_3 x$

Atribuímos valores convenientes a *x*, calculamos *y*, conforme mostra a tabela abaixo. Localizamos os pontos no plano cartesiano obtendo a curva que representa a função.

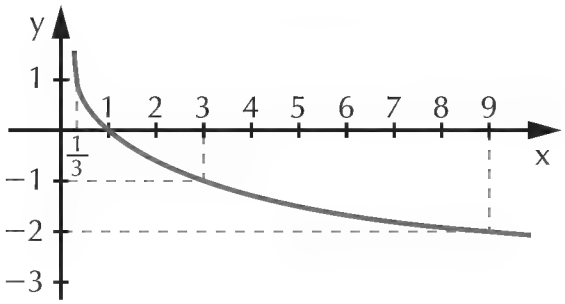
x	y
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2



b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Vamos tabelar valores convenientes de *x*, calculando *y*. Localizamos os pontos no plano cartesiano, determinando a curva correspondente à função.

x	y
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1
9	-2



Observando as funções anteriores, podemos concluir que para $y = \log_a x$:

- se $\mathbf{a > 1}$, a função é crescente;
- se $\mathbf{0 < a < 1}$, a função é decrescente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Classifique as funções em crescente ou decrescente:
   a) $\log_2 x$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x$ c) $\ln x$ d) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ e) $\log_{12} x$

Resolução:

a) Como a base é 2 (portanto maior que 1), a função é crescente.
b) Como a base é $\frac{1}{2}$ (portanto entre 0 e 1), a função é decrescente.
c) $\ln x$ é o *logaritmo natural* de *x*, ou seja, é $\log_e x$; como *e* é maior que 1, então a função é crescente.
d) Como $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, então a função é decrescente.
e) Sendo $12 > 1$, a função é crescente.

2. Determine *m* para que a função $y = \log_{m+3} 57$ seja crescente.

Resolução:

Para que a função seja crescente, a base deve ser maior que 1, então:

$m + 3 > 1 \Rightarrow \boxed{m > -2}$

3. Determine *p* para que a função $y = \log_{2p-3} 21$ seja decrescente.

Resolução:

Para que a função seja decrescente a base deve ser um número compreendido entre zero e 1, então:

$0 < 2p - 3 < 1 \Rightarrow 3 < 2p < 4 \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2} < p < 2}$

EXERCÍCIO PROPOSTO

12. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que:

a) $y = \log_{k+4} 3$ seja crescente;

b) $y = \log_{-k+9} 12$ seja decrescente;

c) $y = \log_{3k+12} 7$ seja crescente;

d) $y = \log_{5k-1} 2$ seja decrescente.

7. Equações logarítmicas

A equação logarítmica caracteriza-se pela presença do sinal de igualdade e da incógnita no logaritmando.

$$\log_6 2x = 2$$

$$\log_3 (x - 1) = 3$$

$$\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) = 3$$

Para resolver uma equação, antes de mais nada devemos estabelecer a *condição de existência* do logaritmo, determinando os valores da incógnita para que o logaritmando e a base sejam positivos, e a base diferente de 1.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. $\log_6 2x = 2$

Resolução:

Condição de existência:

o logaritmando, *2x*, deve ser positivo

$2x > 0 \Rightarrow x > 0$

Em seguida, aplicamos a definição de logaritmo:

$\log_6 2x = 2 \Leftrightarrow 6^2 = 2x \Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = 18$

Observe que o valor encontrado, $x = 18$, satisfaz a condição de existência $x > 0$. Portanto: $S = \{18\}$

2. $\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) = 3$

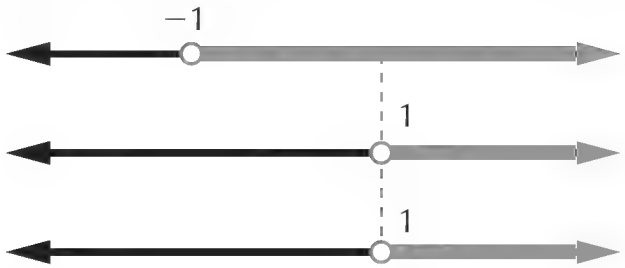
Resolução:

Condição de existência:

os logaritmandos devem ser positivos

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ e $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

Tendo duas condições sobre o valor de *x*, devemos procurar a intersecção das duas para obter uma única condição:



A condição de existência é, portanto, $x > 1$.

Na resolução desta equação, aplicamos a propriedade do produto para reduzir o primeiro membro a um único logaritmo:

$\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) = 3 \Rightarrow \log_2 (x - 1)(x + 1) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x^2 - 1) = \log_2 2 \Rightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

De acordo com a condição de existência, somente são convenientes os valores de *x* maiores que 1, portanto -3 não é elemento do conjunto-solução: $S = \{3\}$

EXERCÍCIO PROPOSTO

13. Resolva as equações:

a) $\log_2 4x = 5$

b) $\log_3 (2x + 7) = 1$

c) $\log_x (-2x + 3) = 2$

d) $\log_{10} (x + 2) + \log_{10} (x - 2) = \log_{10} 12$

e) $\log_2 (-2x - 36) - \log_2 (1 - 3x) = 2$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. $\log_3 \sqrt{x} + \log_9 x = 3$

Resolução:

Condição de existência: $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow x > 0$.

Nesta equação, os logaritmos têm bases diferentes, portanto devemos reduzi-los à mesma base para poder aplicar as propriedades. Mudaremos para base 3 o logaritmo de base 9:

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \log_3 x =$$

$$= \log_3 x^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{x}$$

Substituindo na equação, temos:

$$\log_3 \sqrt{x} + \log_9 x = 3 \Rightarrow \log_3 \sqrt{x} + \log_3 \sqrt{x} = \log_3 3^3 \Rightarrow$$

$$2 \cdot \log_3 \sqrt{x} = \log_3 27 \Rightarrow \log_3 \left(\sqrt{x}\right)^2 = \log_3 27 \Rightarrow$$

$$\log_3 x = \log_3 27 \Rightarrow x = 27$$

Como $x = 27$ satisfaz a condição de existência:

$$S = \{27\}$$

2. $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 21 = 0$

Resolução:

Trata-se de uma equação exponencial. Resolvemos fazendo uma mudança de variável, obtendo uma equação do 2º grau:

$$2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 21 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 21 = 0$$

Seja $2^x = t$

$t^2 - 10t + 21 = 0$. Assim, $\Delta = 100 - 84 = 16$

$$t = \frac{10 \pm 4}{2} \Rightarrow t = 7 \text{ ou } t = 3$$

Como $2^x = t$, temos $\begin{cases} 2^x = 7 \\ 2^x = 3 \end{cases}$

Observe que não é possível obter bases iguais nos dois membros da equação. Nestes casos, a solução é dada em forma de logaritmo. Observe:

$2^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_2 7$ e $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$

$S = \{\log_2 3, \log_2 7\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

14. Resolva as equações:

a) $\log_3 (x + 1) - \log_9 (x + 1) = 1$

b) $\log_4 x + \log_{16} x = 3$

c) $\log_3 (x - 2) - \log_9 (x - 2) = 2$

d) $2 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x + 3 = 0$

15. (UFSC) O valor de *x* compatível para a equação $\log (x^2 - 1) - \log (x - 1) = 2$, é:
(lembre-se de que a base é 10)

16. (UFBA) O logaritmo de $y = 24 - 2x$ na base *x* é 2. Calcule o valor de *x*.

8. Inequações logarítmicas

Identificamos as inequações logarítmicas pela presença da incógnita no logaritmando e de um dos sinais de desigualdade: $>$, $<$, $\geqslant$ ou $\leqslant$. São exemplos de inequações:

$$2 \log_3 x < 4$$

$$\log_{\frac{1}{3}} (x + 3) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 3) \geqslant 0$$

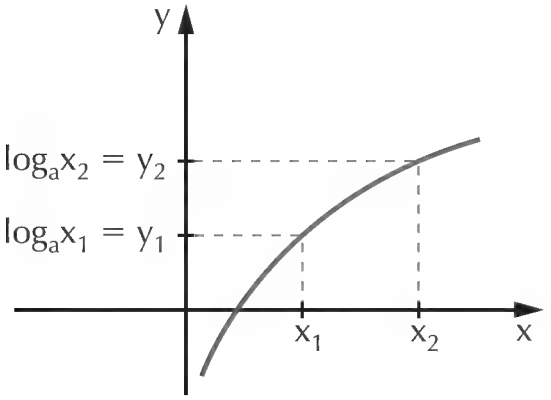
Assim como nas equações, devemos garantir a existência do logaritmo impondo as seguintes condições: o logaritmando e a base devem ser positivos e a base deve ser diferente de 1.

Na resolução de inequações logarítmicas, procuramos obter logaritmos de bases iguais nos dois membros da inequação, para poder comparar os logaritmandos. Porém, para que não ocorram distorções, devemos verificar se as funções envolvidas são crescentes ou decrescentes. A justificativa será feita por meio da análise gráfica de duas funções:

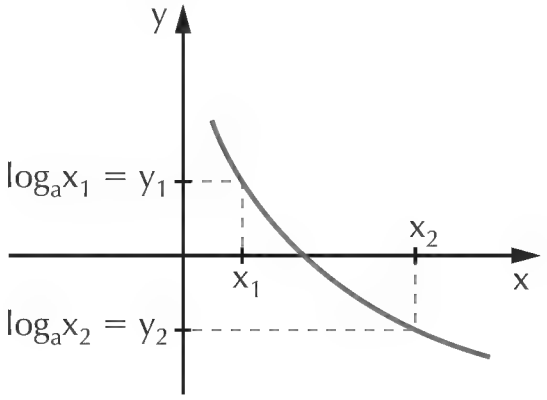
1ª) crescente ($a > 1$): $y = \log_a x$

2ª) decrescente ($a < 1$): $y = \log_a x$

função crescente



função decrescente



Na função *crescente*, observe que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

ou

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$$

Na função *decrescente*, observe que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

ou

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$$

Na função crescente, os sinais coincidem na comparação dos logaritmandos e, posteriormente, dos respectivos logaritmos; porém, o mesmo não ocorre na função decrescente.

De modo geral, quando resolvemos uma inequação logarítmica, temos de observar o valor numérico da base pois,

sendo os dois membros da inequação compostos por logaritmos de mesma base, para comparar os respectivos logaritmandos temos dois casos a considerar:

- se a base é um número maior que 1 (função crescente), utilizamos o mesmo sinal da inequação;
- se a base é um número entre zero e 1 (função decrescente), utilizamos o "sinal inverso" da inequação.

Concluindo, dada a função $y = \log_a x$ e dois números reais x_1 e x_2:

- se $a > 1$, temos $\begin{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \\ x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1 \end{cases}$
- se $0 < a < 1$, temos $\begin{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \\ x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1 \end{cases}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Resolva as inequações:

a) $\log_2 4x < 3$

Resolução:

Condição de existência: $4x > 0 \Rightarrow x > 0$.

Devemos substituir o segundo membro da inequação por um logaritmo de base 2 que equivale a 3, ou seja:

$3 = \log_2 2^3$

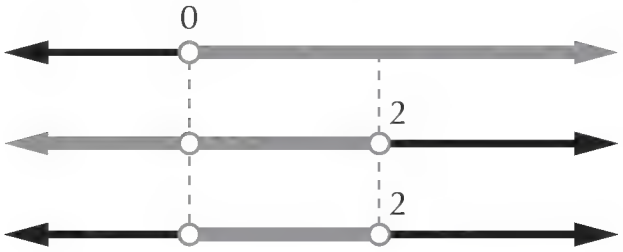
Portanto,

$\log_2 4x < 3 \Rightarrow \log_2 4x < \log_2 2^3$

Os dois membros são compostos por logaritmos de mesma base. Para comparar os logaritmandos, devemos analisar o valor da base. Sendo a base 2 (função crescente), utilizamos o mesmo sinal da inequação. Observe:

$\log_2 4x < \log_2 2^3 \Rightarrow 4x < 2^3 \Rightarrow 4x < 8 \Rightarrow x < 2$

Devemos fazer a intersecção entre a solução encontrada e a condição de existência para determinar o conjunto-solução:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$$

b) $\log_{\frac{1}{3}} (x + 3) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 3) \geqslant 0$

Resolução:

Condição de existência: $\begin{cases} x > -3 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x > 3$

Aplicamos a propriedade do produto e substituímos 0 por $\log_{\frac{1}{3}} 1$:

$\log_{\frac{1}{3}} (x + 3) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 3) \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} (x + 3)(x - 3) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 1$

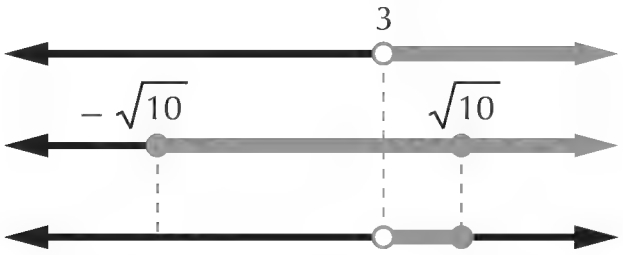
Como $0 < \frac{1}{3} < 1$, "invertemos" o sinal da desigualdade para comparar os logaritmandos:

$(x + 3)(x - 3) \leqslant 1 \Rightarrow x^2 - 9 \leqslant 1 \Rightarrow x^2 - 10 \leqslant 0$

Tratando-se de uma inequação do 2º grau, façamos um esboço do gráfico; as raízes são $+\sqrt{10}$ e $-\sqrt{10}$, a parábola tem concavidade voltada para cima:

Então: $-\sqrt{10} \leqslant x \leqslant \sqrt{10}$

Fazendo a intersecção com a condição de existência:



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant \sqrt{10}\}$

EXERCÍCIO PROPOSTO

17. Resolva as inequações:

a) $\log_2 (x - 3) < \log_2 4$

b) $\log_5 (3x - 1) > -1$

c) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 3$

d) $\log_{\frac{1}{5}} (2x - 4) \leqslant 0$

e) $\log_4 (x - 3) - \log_{16} (x - 3) \leqslant 1$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

18. (Mackenzie-SP) A solução de $\log_x (2x - 1) \leqslant 2$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

e) $\mathbb{R}$

19. (UFMG)

Seja $\log_a 8 = -\frac{3}{4}$, $a > 0$.

O valor da base *a* é:

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{8}$ c) 2 d) 10 e) 16

20. (UFSC) Se $x = \sqrt[3]{360}$, $\log_{10} 2 = 0{,}301$ e $\log_{10} 3 = 0{,}477$, determine a PARTE INTEIRA do valor de $20 \cdot \log_{10} x$.

21. (PUC-SP) Determinar $\log_{10} 350$, sabendo que $\log_{10} 0{,}35 = -0{,}456$:

a) 1,456 d) 2,544

b) 2,456 e) 3,649

c) 1,544

22. (UFRGS-RS) O valor de $\log(217{,}2) - \log(21{,}72)$ é:

a) -1 d) $\log(217{,}2 - 21{,}72)$

b) 0 e) $\dfrac{\log(217{,}2)}{\log(21{,}72)}$

c) 1

23. (Ufes) Simplificando a expressão $2^{(2\log_2 3 - 3\log_2 2)}$, obtemos:

a) $\dfrac{8}{9}$ c) $\dfrac{3}{2}$ e) 1

b) $\dfrac{9}{8}$ d) $\dfrac{2}{3}$

24. (UFPI) O pH de uma solução é definido por

$$pH = \log\left(\frac{1}{H^+}\right)$$

onde H^+ é a concentração de hidrogênio em íons-grama por litro de solução. O pH de uma solução onde $H^+ = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ é:

a) 0 c) 1,0 e) 8

b) 10^{-8} d) 7

25. (UFPB) Se $m = \left(\frac{3}{5}\right)^{\log 4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\log 3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\log 5}$, então o valor de *log m* é:

a) 1 d) $\log\left(\frac{15}{4}\right)$

b) -1 e) 0

c) log 60

26. (Ufac) O inteiro positivo *n*, solução da equação

$\log 2^n + \log 2^{n+1} + \log 2^{n+2} = \log 2^{n(n+1)}$ é o número:

a) 2 c) 3 e) 1

b) -3 d) -1

27. (UFPB) O conjunto-solução da equação

$\log_{10} x + \log_{10}(x - 3) = 1$ está contido no intervalo:

a) $[-6, -2]$ d) $[2, 3]$

b) $[-1, 0]$ e) $[3, 6]$

c) $[0, 2]$

28. (UFRN) Se o logaritmo de 10000 na base *x* é 5, então o logaritmo decimal de *x* é igual a:

a) 1,25 c) 0,60 e) 0,80

b) 1,00 d) 2,00

29. (Fuvest-SP) Se $x = \log_4 7$ e $y = \log_{16} 49$, então $x - y$ é igual a:

a) $\log_4 7$ c) 1 e) 0

b) $\log_{16} 7$ d) 2

30. (UFRRJ) Determine o conjunto D dos números inteiros positivos *x* para os quais a função $y = \dfrac{\log\left(\frac{5-x}{10+x}\right)}{x-2}$ está definida.

Capítulo 6

Funções Circulares
Trigonometria

A trigonometria teve seu desenvolvimento relacionado aos estudos de astronomia, a medida que surgiu a necessidade de se estudarem as fases da Lua, eclipses, distância entre planetas etc. O conhecimento científico e preciso de todos esses fenômenos facilitou a determinação de rotas de navegação e, conseqüentemente, a expansão territorial.

Com o desenvolvimento da matemática, a trigonometria tornou-se independente da astronomia e passou a ser aplicada em outras áreas da ciência, destacando-se na física, por exemplo, nos movimentos circulares, no movimento de oscilação de um pêndulo, na óptica, na cinemática vetorial etc.

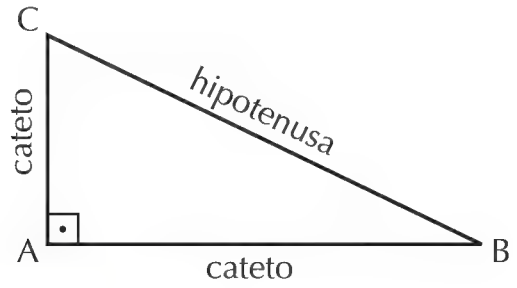
A palavra trigonometria tem origem grega e significa "medida de três ângulos". Basicamente, o que se estuda na trigonometria é a relação entre ângulos e distâncias. Por conta disso, é imprescindível o conhecimento das relações entre ângulos e lados do triângulo retângulo.

1. Triângulo retângulo

Chamamos de *triângulo retângulo* àquele que possui um *ângulo reto* (ângulo de 90°). Dizemos que os outros ângulos são *agudos* (menores que 90°). Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, no triângulo retângulo os *ângulos agudos são complementares*, pois somam 90°.

No triângulo retângulo, os lados recebem nomes específicos: *catetos* e *hipotenusa*. A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto, e os catetos são os lados opostos aos ângulos agudos.

Os *vértices* são identificados com letras maiúsculas.



2. Razões trigonométricas

Sabendo identificar os catetos, podemos definir as razões trigonométricas: seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg).

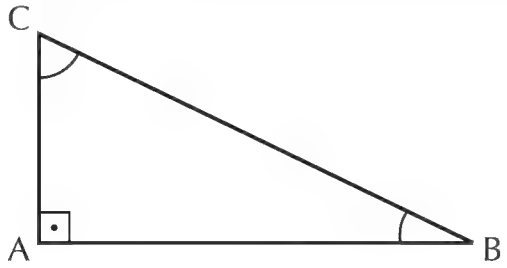
Sendo α o ângulo, podemos definir as seguintes relações:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo}}$$

Por exemplo, no triângulo retângulo da figura, temos:



$$\text{sen } \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad \text{sen } \hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \cos \hat{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \text{tg } \hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

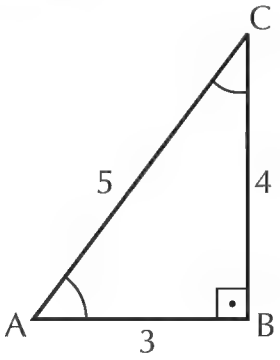
A primeira constatação importante relaciona-se aos ângulos complementares:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \hat{B} = \cos \hat{C} \\ \cos \hat{B} = \text{sen } \hat{C} \\ \text{tg } \hat{B} = \dfrac{1}{\text{tg } \hat{C}} \end{array}\right\} \hat{B} + \hat{C} = 90°$$

Se dois ângulos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do complementar. As tangentes de ângulos complementares são inversas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine as razões trigonométricas do triângulo.



Resolução:

Basta aplicar as definições das razões trigonométricas:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{4}{5} \quad \text{sen } \hat{C} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{3}{5} \quad \cos \hat{C} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{4}{3} \quad \text{tg } \hat{C} = \frac{3}{4}$$

Observação: note que a tangente de um ângulo é a razão entre o seno e o cosseno desse ângulo. De forma geral temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

2. Determine sen 20°, cos 20° e tg 20°, sabendo que sen 70° = = 0,94 e cos 70° = 0,34.

Resolução:

Sabendo que 20° e 70° são ângulos complementares, pois 20° + 70° = 90°, temos:

$$\operatorname{sen} 20° = \cos 70° = 0{,}34$$
$$\cos 20° = \operatorname{sen} 70° = 0{,}94$$

Para encontrar a tangente, aplicamos a definição:

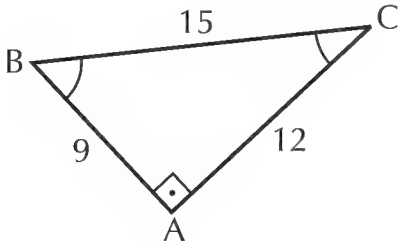
$$\operatorname{tg} 20° = \frac{\operatorname{sen} 20°}{\cos 20°} = \frac{0{,}34}{0{,}94} = 0{,}36$$

$$\operatorname{tg} 70° = \frac{\operatorname{sen} 70°}{\cos 70°} = \frac{0{,}94}{0{,}34} = 2{,}76$$

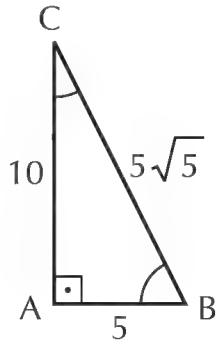
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine as razões trigonométricas nos triângulos:

a)



b)

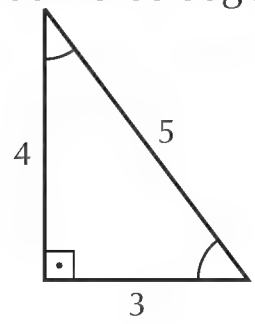


2. Determine sen 15°, cos 15° e tg 15°, sabendo que: sen 75° = 0,97 e cos 75° = 0,26.
3. Determine sen 27° e sen 63°, dados cos 27° = 0,89 e cos 63°= 0,45.

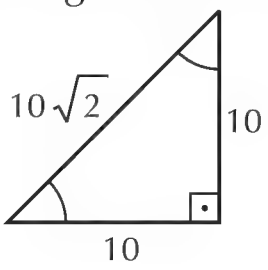
3. Teorema de Pitágoras

Observe os seguintes triângulos retângulos:

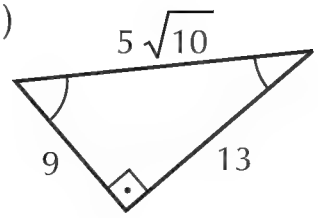
a)



b)



c)



Observe a relação entre os quadrados dos catetos e o quadrado da hipotenusa:

a) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

b) $10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200 = \left(10\sqrt{2}\right)^2$

c) $13^2 + 9^2 = 169 + 81 = 250 = \left(5\sqrt{10}\right)^2$

Pitágoras observou essa relação em triângulos retângulos e formulou o teorema mais conhecido da matemática:

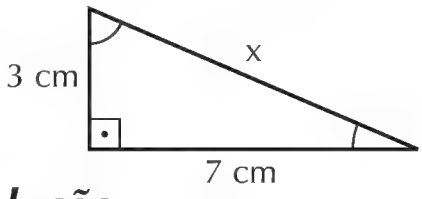
Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

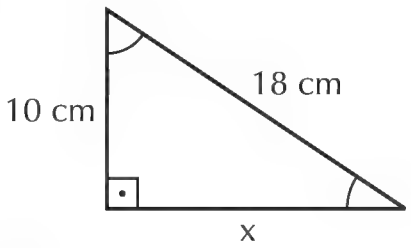
EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine a medida *x* em cada triângulo:

a)



b)



Resolução:

a) Aplicamos o teorema de Pitágoras:

$x^2 = 3^2 + 7^2 \Rightarrow x^2 = 9 + 49 \Rightarrow x^2 = 58 \Rightarrow x = \pm\sqrt{58}$

$-\sqrt{58}$ não convém; portanto $x = \sqrt{58}$ cm

A raiz negativa não convém, porque estamos trabalhando com medidas de comprimento. Nos exercícios seguintes, consideraremos somente as raízes positivas.

b) Aplicamos o teorema de Pitágoras:

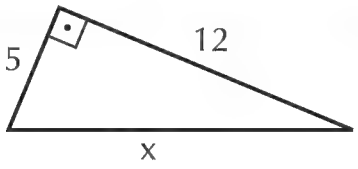
$$18^2 = x^2 + 10^2 \Rightarrow x^2 = 324 - 100 \Rightarrow x^2 = 224 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{224} \Rightarrow x = 4\sqrt{14} \text{ cm}$$

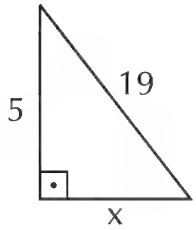
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4. Calcule o valor de *x* nas figuras:

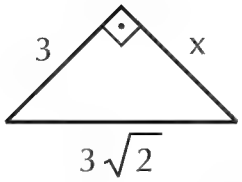
a)



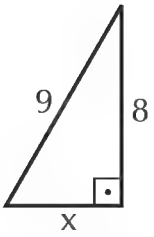
b)



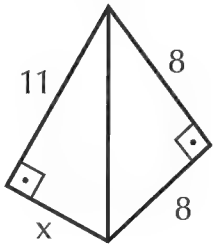
c)



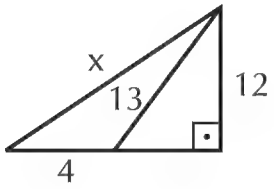
d)



e)



f)



5. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 25 cm e a soma dos catetos é 35 cm. Determine a medida de cada cateto.

6. Os catetos de um triângulo retângulo têm a mesma medida. Se a hipotenusa mede $5\sqrt{2}$ cm, determine a medida dos catetos.

4. Ângulos notáveis

Os ângulos notáveis são: 30°, 45° e 60°. O conhecimento do seno, cosseno e tangente desses ângulos constitui-se em uma importante ferramenta no estudo da trigonometria.

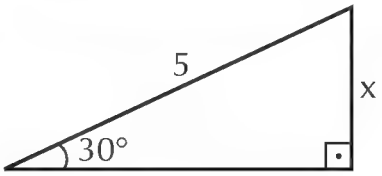
A tabela ao lado, chamada de tabela trigométrica de ângulos notáveis, resume esses valores.

α	30°	45°	60°
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcular o valor de *x* nas figuras:

a)

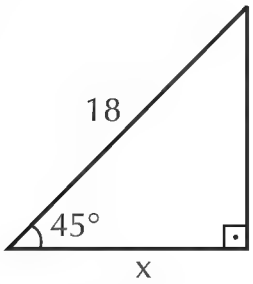


Resolução:

x é o *cateto oposto* ao ângulo de 30°. Aplicamos, portanto, a definição de seno:

$$\text{sen } 30° = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$$

b)



Resolução:

x é o *cateto adjacente* ao ângulo de 45°, portanto aplicamos a definição de cosseno:

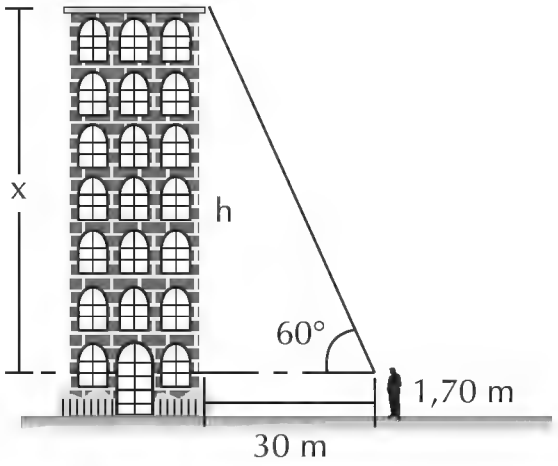
$$\cos 45° = \frac{x}{18} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{18} \Rightarrow 2x = 18\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 9\sqrt{2}}$$

2. Um observador de 1,70 m vê um pássaro no alto de um prédio sob um ângulo de 60°. Sabendo que o observador está a 30 m do prédio, determine a altura do prédio.

Resolução:

De acordo com os dados do problema, podemos, por meio de um desenho, verificar que a altura do prédio (h) é a soma da altura do observador com o cateto oposto ao ângulo de 60°, que chamamos de *x*:



$$h = x + 1{,}70$$

Aplicamos a definição de tangente para encontrarmos o valor de *x*:

$$\text{tg } 60° = \frac{x}{30} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30\sqrt{3} \text{ m}$$

Então:

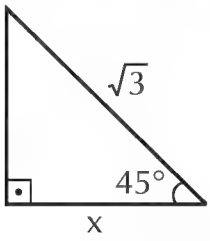
$$h = x + 1{,}70 \Rightarrow h = 30\sqrt{3} + 1{,}70$$

Utilizando $\sqrt{3} \simeq 1{,}73 \Rightarrow h \simeq 51{,}9 + 1{,}70 \Rightarrow h \simeq 53{,}6 \text{ m}$

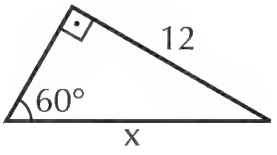
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Calcule o valor de x nas figuras:

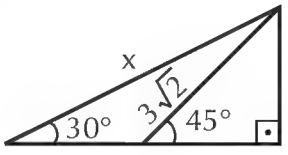
a)



b)



c)

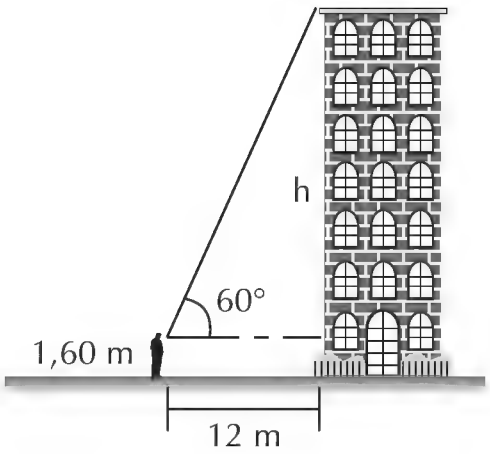


8. (Cesgranrio-RJ) Uma rampa plana, de 36 m de comprimento, faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente de:

a) $6\sqrt{3}$ m b) 12 m c) 13,6 m d) $9\sqrt{3}$ m e) 18 m

9. (UFAL) Um observador se encontra a 12 m de um edifício e vê o seu topo sob um ângulo de 60°, conforme a figura ao lado.

Se o piso da rua é horizontal e os olhos do observador se acham a 1,60 m acima desse piso, a altura h do edifício é de, aproximadamente:



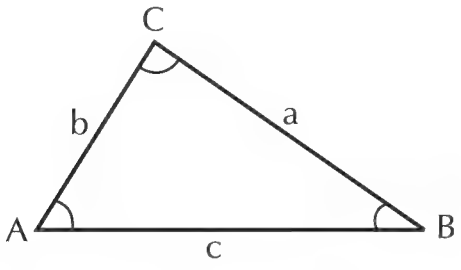
a) 25 m d) 22,8m b) 24,8 m e) 22 m c) 23,4 m

5. Relações trigonométricas

Estudamos as relações trigonométricas em triângulos retângulos. Vejamos, agora, estas relações a outros tipos de triângulos:

5.1 Teorema dos senos

Em qualquer triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.



Assim, segundo o teorema dos senos, temos que:

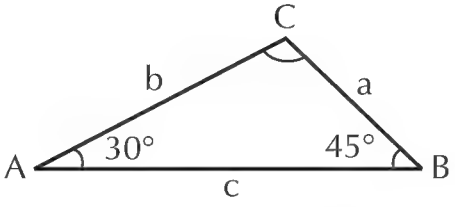
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Num triângulo ABC, temos $\hat{A} = 30°$, $\hat{B} = 45°$ e $a = \sqrt{2}$. Determine a medida do lado *b*.

Resolução:

Por meio de uma figura, podemos visualizar os dados do problema:



De acordo com o teorema dos senos, temos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{b}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

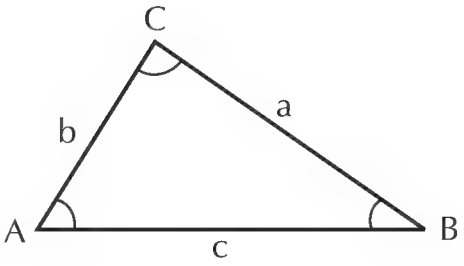
Tomando a primeira igualdade:

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{b}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot 2 = b \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = 2$$

5.2 Teorema dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



Segundo o enunciado do teorema, temos:

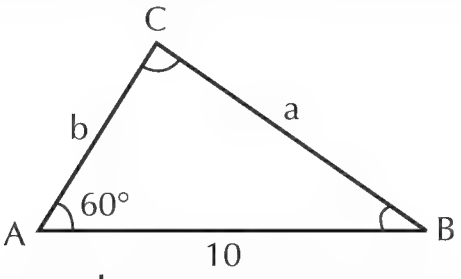
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Se um triângulo tem dois lados que medem 8 cm e 10 cm, formando um ângulo de 60° entre si, qual será a medida do terceiro lado?

Resolução:

De acordo com os dados, podemos fazer a seguinte figura:



Aplicando o teorema dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 60°$$

$$a^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$$

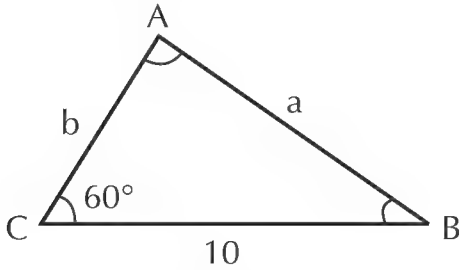
$$a^2 = 164 - 80 = 84 \Rightarrow a = \sqrt{84} \Rightarrow a = 2\sqrt{21}\ \text{cm}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. (Mackenzie-SP) Os ângulos internos, $\hat{A}$ e $2\hat{A}$, de um triângulo, têm como medida dos lados opostos, respectivamente, os valores 1 e $\sqrt{2}$. O ângulo $\hat{A}$ mede:

a) 90° b) 60° c) 45° d) 30° e) arc sen $\sqrt{2}$

11. (PUC-SP) No triângulo da figura a seguir: a = 20, b = 25 e g = 60°. Então, sen α é igual a:



a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

12. Em um triângulo ABC tal que $BC = \sqrt{3}$, $\hat{A} = 60°$ e $\hat{B} = 75°$, a medida AB é:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) $2\sqrt{2}$ e) 3

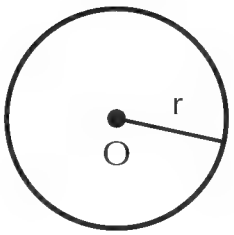
13. (Cesgranrio-RJ) Em um triângulo ABC, AB = 3, BC = 4 e $A\hat{B}C = 60°$. O lado AC mede:

a) 5 b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{37}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{3}$

(consulte a tabela trigonométrica no final deste livro)

6. Circunferência

Circunferência é o conjunto de pontos que estão à mesma distância de um ponto fixo do plano; esse ponto é o centro da circunferência (O) e a distância é o raio (r). *Diâmetro* é o segmento que tem extremidades na circunferência e que passa pelo centro dela.



7. Comprimento da circunferência

Faça o seguinte experimento: contorne uma moeda com um pedaço de linha e corte o excesso, fazendo com que as extremidades coincidam. Estique a linha e veja seu comprimento. A medida encontrada é o comprimento da circunferência da moeda.

Por exemplo, para uma moeda de R$ 1,00 temos aproximadamente 7,55 cm de comprimento. O seu raio é aproximadamente 1,2 cm, portanto o diâmetro é 2,4 cm. Simbolizamos o comprimento por C e o diâmetro por d. Vamos determinar o quociente entre o comprimento da circunferência da moeda e seu diâmetro:

$$\frac{C}{d} = \frac{7,55}{2,4} = 3,146$$

Podemos determinar esse quociente para diversas circunferências, variando o comprimento e tomando o respectivo diâmetro. Utilizando métodos mais precisos para medir o comprimento, verificamos que esse quociente é constante para qualquer circunferência. Essa constante é o número irracional π.

$\pi = 3,141592... \Rightarrow \boxed{\pi \simeq 3,14}$

Temos então:

$\pi = \frac{C}{d}$, mas $d = 2r \Rightarrow \pi = \frac{C}{2r} \Rightarrow \boxed{C = 2 \cdot \pi \cdot r}$

Essa é a fórmula para determinar o comprimento de qualquer circunferência, variando apenas seu respectivo raio (r).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine o comprimento da circunferência de raio 5 cm.

Resolução:

Basta substituir na fórmula:

$C = 2 \cdot \pi \cdot r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \Rightarrow C \simeq 10 \cdot 3{,}14 \Rightarrow C \simeq 31{,}4 \text{ cm}$

2. João caminha em uma pista circular todos os dias. O raio da pista é 100 m. Se João costuma caminhar aproximadamente 10 km por dia, quantas voltas inteiras ele percorre por dia?

Resolução:

Se o raio da pista é r = 100 m, então o comprimento da circunferência é:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r = 2\pi \cdot 100 \Rightarrow C = 200\pi \text{ m}$$

Ou seja, 200π metros é o equivalente a uma volta;sendo 10 km = 10.000 m, então o número de voltas é o quociente entre a distância percorrida por dia e a distância equivalente a uma volta:

$$n = \frac{10.000}{200\pi} = \frac{50}{\pi} \Rightarrow n \simeq \frac{50}{3{,}14} \Rightarrow n \simeq 15{,}9$$

Como é pedido o número de voltas inteiras, então ele percorre 15 voltas por dia.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

14. Determine, aproximadamente, o comprimento da circunferência de raio:

a) r = 7 cm b) r = 12 cm c) $r = \sqrt{3}$ m

15. Determine o raio da circunferência que tem 12,56 cm de comprimento.

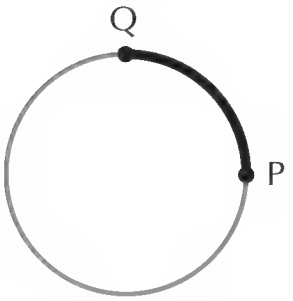
16. Determine o diâmetro da circunferência que tem comprimento de 9π m.

17. Quantas voltas dá a roda de uma bicicleta que possui 30 cm de raio, para percorrer 37,68 m?

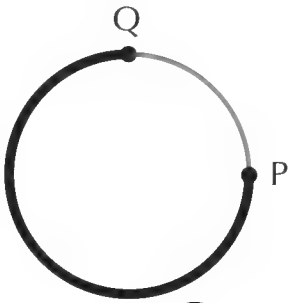
18. Suponha que uma prova de Fórmula Indy será realizada em uma pista circular de 800 m de raio. A prova é composta de 200 voltas. Qual a distância percorrida durante a prova? Se um carro tem velocidade média de 250 km/h, em quanto tempo, aproximadamente, concluirá a prova?

8. Arco de circunferência

Tomando dois pontos distintos sobre uma circunferência, estamos determinando dois arcos:

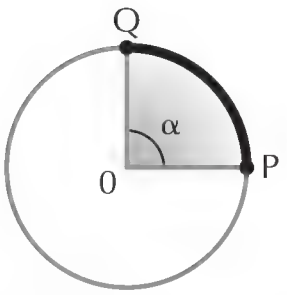


arco $\overset{\frown}{PQ}$



arco $\overset{\frown}{QP}$

Um ângulo com vértice no centro de uma circunferência é chamado *ângulo central* (α). Portanto, unindo as extremidades dos arcos ao centro da circunferência encontramos o *ângulo central* α correspondente ao arco $\overset{\frown}{QP}$.

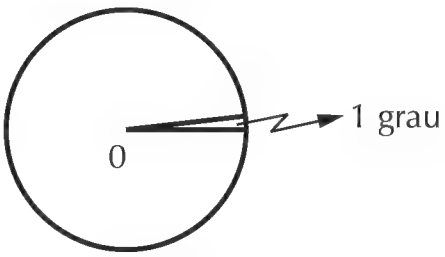


Como cada arco possui um ângulo central correspondente, dizemos que o ângulo e o arco possuem medidas iguais. Portanto, o número que exprime a medida do ângulo $Q\hat{O}P$ é o mesmo que exprime a medida do arco $\overset{\frown}{QP}$.

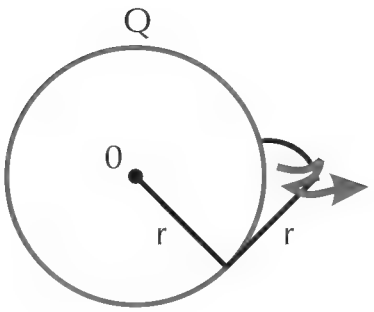
$$\text{medida } \overset{\frown}{QP} = \text{medida } Q\hat{O}P = \alpha$$

Utilizam-se duas unidades de medidas para arcos de circunferência: o *grau* e o *radiano*.

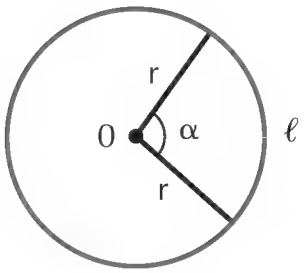
Obtém-se *1 grau* (1°) dividindo a circunferência em 360 partes iguais:



Obtém-se *1 radiano* (1 rad) tomando sobre a circunferência um arco que tenha a mesma medida que o raio.



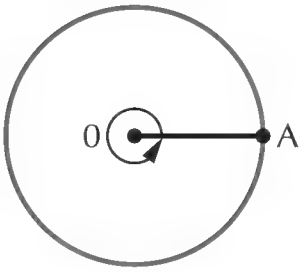
Então, para um arco de medida ℓ, se quisermos saber a quantos radianos o mesmo corresponde, basta dividi-lo pelo raio:



$$\alpha = \frac{\ell}{r} \text{ rad}$$

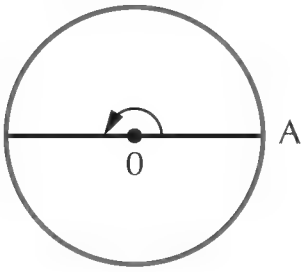
Em uma circunferência de raio 1, temos que o comprimento é $C = 2 \cdot \pi \cdot 1 \Rightarrow C = 2\pi$.

Em outras palavras, uma volta completa (360°) sobre a circunferência de raio 1 equivale ao arco de *2π rad*.



$$1 \text{ volta} = 360° = 2\pi \text{ rad}$$

Portanto, meia volta equivale a:



$$\frac{1}{2} \text{ volta} = 180° = \pi \text{ rad}$$

Utilizamos a relação destacada para converter arcos de radianos para graus e vice-versa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Transforme 150° em radianos.

Resolução:

Basta utilizar uma regra de três simples:

$$180° \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$
$$150° \leftrightarrow x$$

$$180x = 150\pi \Rightarrow x = \frac{150\pi}{180} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}}$$

2. Transforme $\frac{2\pi}{3}$ rad em graus.

Resolução:

Utilizamos a regra de três: $180° \leftrightarrow \pi$ rad

$$x \leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$x = \frac{180 \cdot \frac{2\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow \boxed{x = 120°}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

19. Converta em radianos:

a) 120° b) 310° c) 230° d) 135°

20. Converta em graus:

a) $\frac{7\pi}{6}$ rad b) $\frac{5\pi}{4}$ rad c) $\frac{4\pi}{3}$ rad d) $\frac{11\pi}{6}$ rad

21. (UFMG) A medida, em graus, de um ângulo que mede 4,5 radianos é:

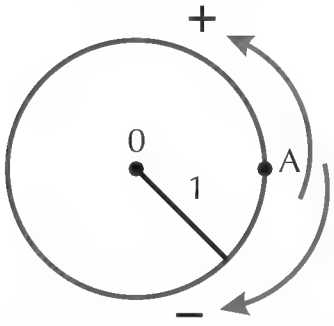
a) $\frac{4,5}{\pi}$ b) 4,5 π c) $\frac{810}{\pi}$ d) 810 e) 810 π

22. (Fuvest-SP) Uma arco de circunferência mede 300° e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio, em metros?

a) 157 b) 284 c) 382 d) 628 e) 764

9. Ciclo trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada de raio 1. A orientação é:



positiva no sentido anti-horário.
negativa → no sentido horário.

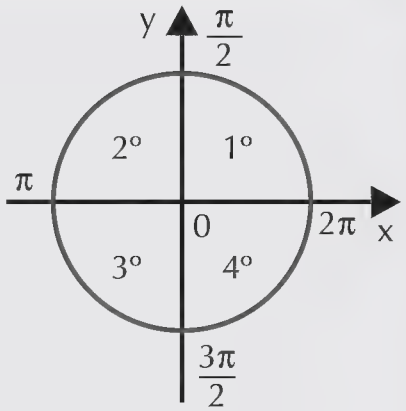
O ciclo trigonométrico é dividido em *quadrantes* determinados pelos eixos cartesianos:

1º quadrante – contém a extremidade dos arcos entre 0 e 90° ou 0 e $\frac{\pi}{2}$ rad.

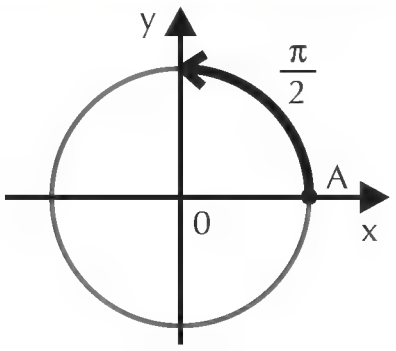
2º quadrante – contém a extremidade dos arcos entre 90° e 180° ou $\frac{\pi}{2}$ e π rad.

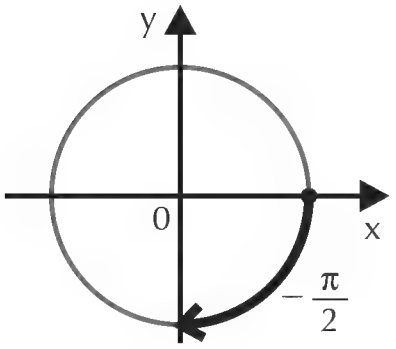
3º quadrante – contém a extremidade dos arcos entre 180° e 270° ou π e $\frac{3\pi}{2}$ rad.

4º quadrante – contém a extremidade dos arcos entre 270° e 360° ou $\frac{3\pi}{2}$ e 2π rad.



A origem dos arcos no ciclo trigonométrico é o ponto *A*, que corresponde a 0. Caminhando no sentido anti-horário, encontramos os arcos positivos, por exemplo o arco $\frac{\pi}{2}$ rad.

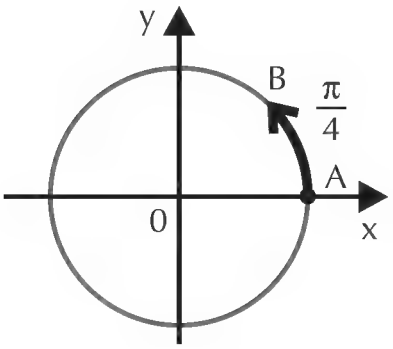


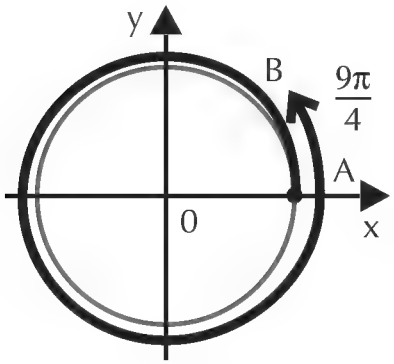


Para localizar os arcos negativos, caminhamos, a partir de A, no sentido horário. Observe a localização do arco de $-\frac{\pi}{2}$ rad.

10. Arcos côngruos

Na figura, temos o arco que tem origem em A e extremidade em B correspondente a $\frac{\pi}{4}$ rad.





Podemos dar uma volta completa no ciclo, parando novamente em B.

Como a partir de $\frac{\pi}{4}$ rad demos uma volta completa no ciclo (360° ou 2π rad), então o valor desse arco será:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi + 8\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \text{ rad}$$

Podemos, a partir de $\frac{\pi}{4}$ rad, efetuar duas voltas completas.

Então, como duas voltas correspondem a $2 \cdot 360°$ ou $2 \cdot 2\pi$ rad, temos que esse arco vale:

$$\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{\pi + 16\pi}{4} = \frac{17\pi}{4} \text{ rad}$$

Concluindo, podemos dar quantas voltas quisermos sobre a circunferência, obtendo arcos com extremidades em B. Dizemos que os arcos assim obtidos (no exemplo, são $\frac{9\pi}{4}$ e $\frac{17\pi}{4}$ rad) são côngruos a $\frac{\pi}{4}$ rad.

Podemos expressar os arcos com extremidades em $\frac{\pi}{4}$ rad da seguinte maneira:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

onde k é o número de voltas a partir do arco de $\frac{\pi}{4}$ rad, então:

- se $k = 0$, temos $x = \frac{\pi}{4}$ rad;
- se $k = 1$, temos $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ rad;
- se $k = 2$, temos $x_2 = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}$ rad;
- se $k = 3$, temos $x_3 = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{25\pi}{4}$ rad, e assim sucessivamente.

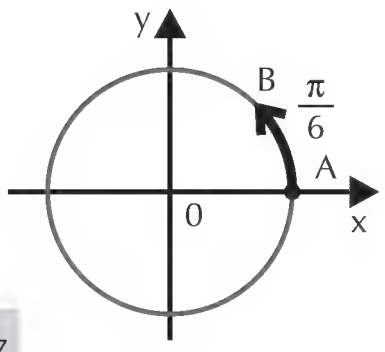
Dizemos que $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ é a expressão geral dos arcos com extremidades em $\frac{\pi}{4}$ rad.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Obtenha a expressão geral dos arcos com extremidades em $\frac{\pi}{6}$ rad.

Resolução:

A partir de $\frac{\pi}{6}$ rad, podemos obter outro arco com extremidade nesse ponto da circunferência se efetuarmos uma volta completa, ou seja, 2π rad.



Portanto, a expressão geral é:

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

2. Determine o menor arco não-negativo côngruo a 1.000°.

Resolução:

O menor arco não-negativo está sempre entre 0 e 360° e, se é côngruo a 1.000° então sua extremidade é a mesma que 1.000°. Para determinarmos esse arco, dividimos 1.000° por 360° e assim saberemos quantas voltas foram dadas sobre a circunferência, sendo o resto da divisão correspondente ao arco côngruo procurado:

$$\begin{array}{r|l} 1.000^\circ & 360^\circ \\ \hline 280^\circ & 2 \end{array}$$

então $1.000^\circ = \underbrace{2 \cdot 360^\circ}_{\text{duas voltas}} + 280^\circ$

Portanto, o menor arco não-negativo côngruo a 1.000° é 280°.

3. Encontrar a primeira determinação positiva do arco de $\frac{28\pi}{3}$ rad.

Resolução:

A primeira determinação positiva é o mesmo que o menor arco não-negativo. Nesse caso, como o arco está em radianos, dividimos por 2π rad, que equivale a uma volta completa. Porém, como temos uma divisão de frações, é conveniente que os denominadores sejam iguais. Procuramos, então, uma fração equivalente a 2π rad com denominador 3, isto é:

$$2\pi = \frac{6\pi}{3}$$

então: $\frac{28\pi}{3} = \frac{28\pi}{3} \div \frac{6\pi}{3} = \underbrace{4 \cdot \frac{6\pi}{3}}_{\text{quatro voltas}} + \frac{4\pi}{3}$

A primeira determinação positiva é $\frac{4\pi}{3}$ rad.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

23. Determine a expressão geral dos arcos:

a) $\frac{5\pi}{4}$ rad b) $\frac{7\pi}{6}$ rad c) $\frac{5\pi}{3}$ rad

24. Encontre a primeira determinação positiva dos arcos:

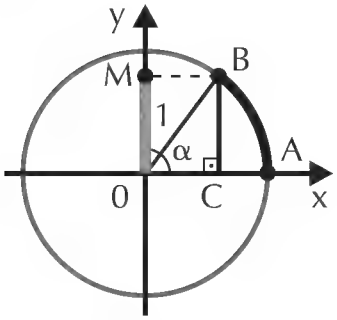
a) $\frac{91\pi}{6}$ rad b) $\frac{34\pi}{3}$ rad c) $\frac{35\pi}{3}$ rad d) $\frac{43\pi}{4}$ rad

25. Determine o menor arco não negativo côngruo a:

a) 5.000° b) 1.212° c) $\frac{61\pi}{4}$ rad d) 100π rad

11. Seno

Observe a figura:



Ao arco $\overset{\frown}{AB}$ está associado o ângulo α; sendo o triângulo OBC retângulo, podemos determinar o seno de α:

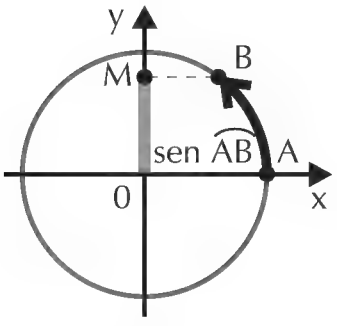
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{BC}}{1} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \overline{BC}$$

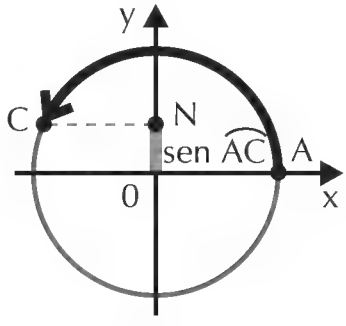
Observe que $\overline{BC} = \overline{OM}$, portanto podemos substituir $\overline{BC}$ por $\overline{OM}$, obtendo assim:

$$\text{sen } \alpha = \overline{OM}$$

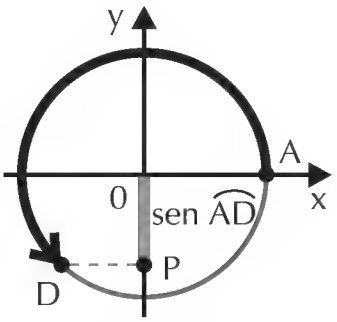
De maneira geral, se quisermos determinar o seno de um arco, basta projetar sua extremidade sobre o eixo Oy, que chamaremos de *eixo dos senos*.



$\text{sen } \overset{\frown}{AB} = \overline{OM}$



$\text{sen } \overset{\frown}{AC} = \overline{ON}$



$\text{sen } \overset{\frown}{AD} = \overline{OP}$

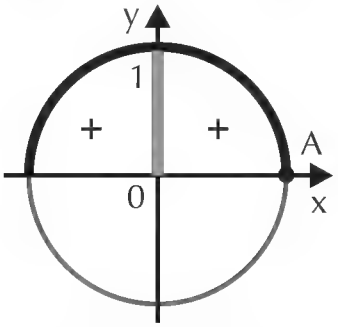
Como o ciclo trigonométrico tem raio 1, para qualquer arco α, temos que:

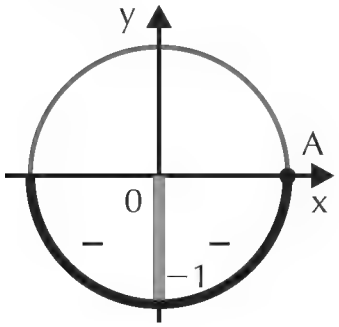
$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \alpha \leqslant 1$$

11.1 Sinais

O eixo dos senos possui a mesma orientação que o eixo Oy; acima do zero, o sinal é positivo e, abaixo do zero, o sinal é negativo. Temos então:

arcos com extremidades no *primeiro* ou *segundo quadrantes* têm seno *positivo*.





arcos com extremidades no *terceiro* ou *quarto quadrantes* têm seno *negativo*.

Dicas úteis

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule $\operatorname{sen} \frac{29\pi}{6}$.

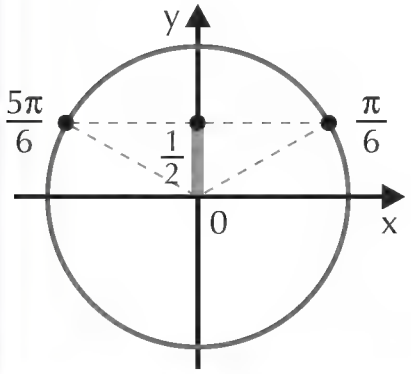
Resolução:

É necessário determinar o arco côngruo entre 0 e 2π rad:

$$\frac{29\pi}{6} \div \frac{12\pi}{6} = 2 \cdot \frac{12\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}$$

Então $\frac{5\pi}{6}$ rad é côngruo a $\frac{29\pi}{6}$ rad, portanto $\text{sen}\ \frac{29\pi}{6} = \text{sen}\ \frac{5\pi}{6}$.

Observando o ciclo trigonométrico, concluímos que $\frac{5\pi}{6}$ é simétrico a $\frac{\pi}{6}$, então, temos que:



$$\text{sen}\ \frac{5\pi}{6} = \text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\text{sen}\ \frac{29\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

26. Determine:

a) $\text{sen}\ \frac{2\pi}{3}$ b) $\text{sen}\ \frac{5\pi}{3}$ c) $\text{sen}\ \frac{7\pi}{4}$ d) $\text{sen}\ \frac{7\pi}{6}$ e) $\text{sen}\ \frac{21\pi}{4}$

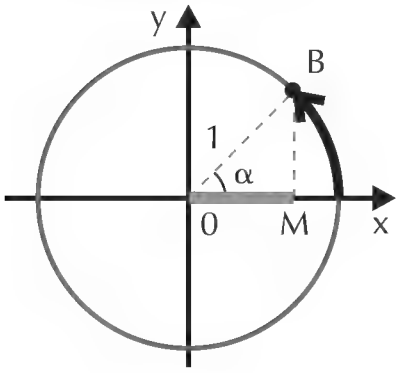
27. Calcule o valor da expressão: $P = \dfrac{\text{sen}\ \frac{3\pi}{2} + 2 \cdot \text{sen}\ \frac{11\pi}{4}}{\left(\text{sen}\ \frac{37\pi}{6}\right)^2 + \text{sen}\ \pi}$

28. Defina as condições sobre $m \in \mathbb{R}$ para que exista sen x em cada caso:

a) $\text{sen}\ x = \frac{2m + 3}{3}$ b) $\text{sen}\ x = \frac{4 - m}{5}$

12. Cosseno

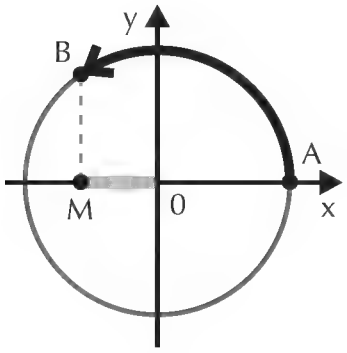
Observe a figura:



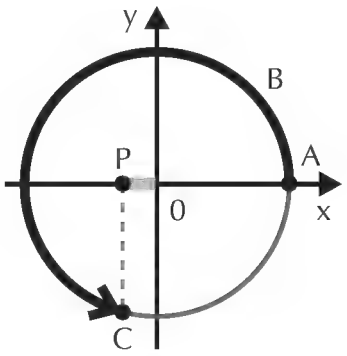
O ângulo α está associado ao arco $\overset{\frown}{AB}$. No triângulo retângulo OMB, calculamos o cosseno de α:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OM}}{1} \Rightarrow \boxed{\cos \alpha = \overline{OM}}$$

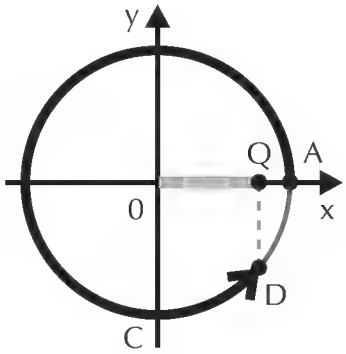
Portanto, para determinar o cosseno de um arco, basta projetar sua extremidade sobre o eixo x, que chamaremos de *eixo dos cossenos.* Observe as figuras:



$\cos \widehat{AB} = \overline{OM}$



$\cos \widehat{AC} = \overline{OP}$

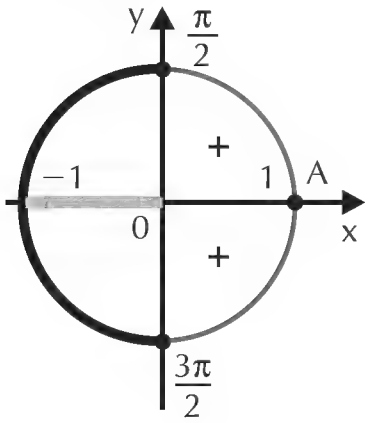


$\cos \widehat{AD} = \overline{OQ}$

Como o raio do ciclo trigonométrico é 1, para qualquer arco α, temos:

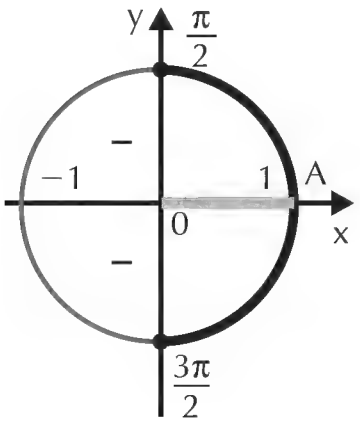
$$-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$$

12.1 Sinais



Os arcos que têm extremidades no *primeiro* ou *quarto quadrantes* possuem *cosseno positivo.*

Os arcos que têm extremidades no *segundo* ou *terceiro quadrantes* possuem cosseno negativo.



Dicas úteis

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

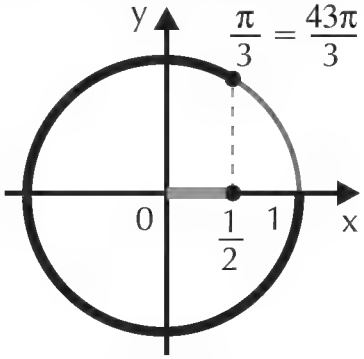
EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule $\cos \frac{43\pi}{3}$.

Resolução:

Inicialmente, procuramos o arco côngruo entre 0 e 2π:

$$\begin{array}{r|l} \frac{43\pi}{3} & \frac{6\pi}{3} \\ \hline -\ \frac{42\pi}{3} & 7 \\ \hline \frac{\pi}{3} & \end{array}$$



Então $\frac{\pi}{3}$ rad é côngruo a $\frac{43\pi}{3}$ rad; portanto seus cossenos são iguais.

$$\cos \frac{43\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

29. Determine:

a) $\cos \frac{2\pi}{3}$

b) $\cos \pi$

c) $\cos \frac{3\pi}{2}$

d) $\cos \frac{7\pi}{6}$

e) $\cos \frac{7\pi}{4}$

f) $\cos \frac{11\pi}{4}$

30. Determine o valor da expressão:

$$P = \frac{2 \cdot \cos\frac{19\pi}{6} + \left(\cos\frac{15\pi}{4}\right)^2}{\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{11\pi}{3}}$$

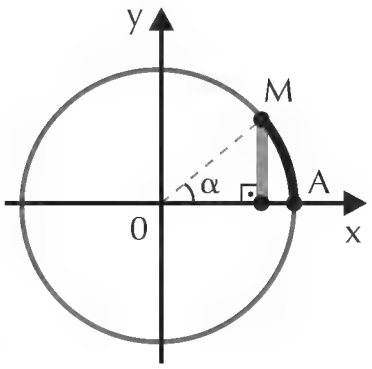
31. (UFAC) Sabendo que $x = \text{sen}\ \frac{\pi}{4}$, $y = \text{sen}\ \frac{\pi}{6}$ e $z = \cos\frac{\pi}{4}$, então é correto afirmar que:

a) $x > y > z$ c) $x = z$ e $y < z$ e) $y = z$

b) $x < y < z$ d) $x = y$ e $y < z$

13. Relação Fundamental da Trigonometria

Na figura, no ciclo trigonométrico o arco $\overset{\frown}{AM}$ tem ângulo central α.



No triângulo retângulo OPM, sendo o raio 1, temos que:

$\text{sen}\ \alpha = \overline{PM}$

$\cos\alpha = \overline{OP}$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = 1$. Substituindo:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Essa igualdade é a *relação fundamental da trigonometria*.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Dado que $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$, determine a tg α, sabendo que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Resolução:

Sabendo que $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$, precisamos determinar o valor de cos α. Dado o $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$, recorremos à relação fundamental:

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{4}{5}$

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tem extremidade no primeiro quadrante, nesse caso o cosseno é positivo:

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

Portanto: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

32. Calcule sen x, sabendo que $\cos x = \frac{1}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

33. Calcule cos α, sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

34. Calcule tg α, sabendo que $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\frac{3\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$.

35. (PUC-SP) Sendo $\cos x = \frac{1}{m}$ e $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{m+1}}{m}$, determinar *m*.

APLICAÇÃO PRÁTICA

A quadratura do círculo

Gerhard Kremer, o Mercator, cartógrafo holândes, propôs em 1569 a chamada Projeção Mercator para representar a superfície terrestre. Nela, todos os continentes e oceanos se alinhavam, a partir do Equador, divididos em retângulos com 24 traçados verti-

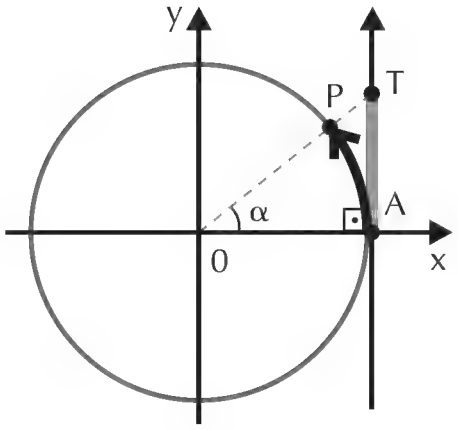
cais e 12 horizontais, e com seu trabalho os mapas que antes representavam o globo como uma esfera passaram a representá-lo também na forma de um retângulo.

Isso facilitou enormemente a expansão ocidental, pelo fato de a Projeção Mercator ter melhorado a qualidade das cartas náuticas de então.

(Superinteressante, 2002)

14. Tangente

Na figura ao lado, traçamos, no ciclo trigonométrico, uma reta paralela ao eixo dos senos, tangente ao ciclo no ponto A.



No triângulo retângulo OAT, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}$$

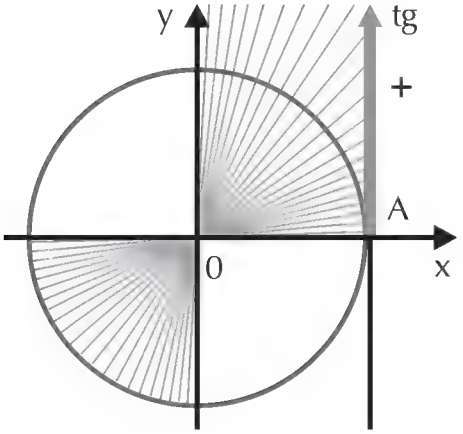
Como o raio é 1, então OA = 1

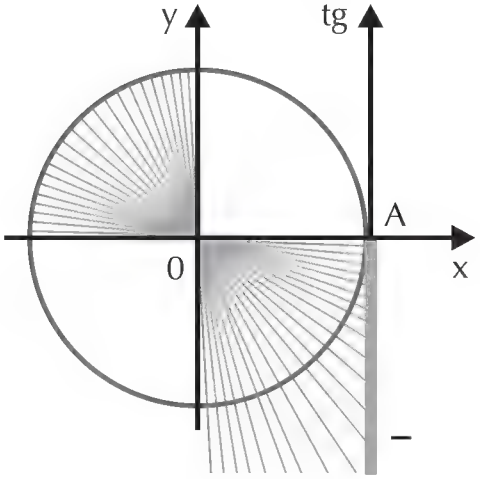
$$\text{tg } \alpha = \overline{AT}$$

Essa reta é chamada de *eixo das tangentes*. Observe que a tangente de α é obtida prolongando-se o raio $\overline{OP}$ até interceptar o eixo das tangentes.

14.1 Sinais

Pela observação das figuras a seguir, podemos concluir que:





No *primeiro* e *terceiro quadrantes*, a tangente é *positiva*; no *segundo* e *quarto quadrantes*, a tangente é *negativa*.

Dicas úteis

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine $\operatorname{tg}\frac{43\pi}{6}$.

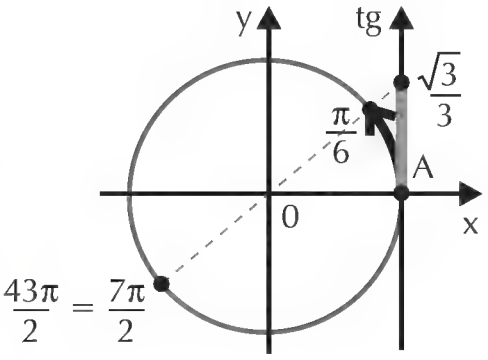
Resolução:

Inicialmente, determinamos o arco côngruo entre 0 e 2π:

$$\frac{43\pi}{6} \div \frac{12\pi}{6} = 3 \cdot \frac{12\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{36\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}$$

Portanto, $\operatorname{tg}\frac{43\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$.

Veja no ciclo trigonométrico que o simétrico de $\frac{7\pi}{6}$ rad no primeiro quadrante é o arco de $\frac{\pi}{6}$ rad; portanto suas tangentes são iguais:



Como $\text{tg}\ \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

então $\text{tg}\ \frac{43\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36. Determine:

a) $\text{tg}\ \frac{\pi}{4}$ b) $\text{tg}\ \frac{5\pi}{6}$ c) $\text{tg}\ \frac{5\pi}{3}$ d) $\text{tg}\ \frac{3\pi}{4}$ e) $\text{tg}\ \frac{\pi}{2}$ f) $\text{tg}\ \frac{33\pi}{4}$

37. Determine o valor de A na expressão:

$$A = \frac{\text{tg}\ 7\pi - \left(\text{tg}\ \frac{31\pi}{6}\right) \cdot \left(\text{tg}\ \frac{25\pi}{3}\right)}{2 \cdot \left(\text{tg}\ \frac{17\pi}{4}\right) \cdot \left(\text{tg}\ \frac{3\pi}{4}\right)}$$

38. (FGV-SP) O valor de $\log \left(\text{tg}\ \frac{5\pi}{4}\right)$ é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

15. Cotangente, secante e cossecante

Define-se a *cotangente* como a razão entre o cosseno e o seno de um arco:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen}\ \alpha}$$

e como podemos notar, trata-se do inverso da tangente:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$$

sendo $\text{sen}\ \alpha \neq 0$ e, portanto, $\alpha \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A *secante* de um arco é:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Sendo $\cos \alpha \neq 0$, então $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A *cossecante* de um arco é:

$$\operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

sendo $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$ e, portanto, $\alpha \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

39. Determine:

a) $\operatorname{cotg} \frac{27\pi}{4}$ b) $\sec \frac{35\pi}{3}$ c) $\operatorname{cossec} \frac{21\pi}{6}$

40. (UFRR) Seja x um ângulo do terceiro quadrante tal que $\operatorname{tg} x = 1$. Calcular o valor da expressão $-\operatorname{cotg} x \cdot \sqrt{2} \operatorname{sen} x$.

41. (UFSC) O valor da expressão $\frac{4 \operatorname{tg} x \cdot 7 \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec}^2 x - 1}$ para $x = 60°$.

16. Relações derivadas

Utilizando as definições de cotangente, secante e cossecante associadas à relação fundamental da trigonometria, podemos deduzir fórmulas que auxiliam na simplificação de expressões trigonométricas. São elas:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha, \text{ sendo } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cossec}^2 \alpha, \text{ sendo } \alpha \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Simplifique:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}{\sec\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha}$$

Resolução:

Basta substituir as funções dadas de modo conveniente:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}{\sec\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\sec\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\sec\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{\dfrac{\cancel{\sec^2\alpha}}{\cancel{\operatorname{tg}\alpha}}}{\cancel{\sec\alpha} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\operatorname{tg}\alpha}}} = \sec\alpha$$

2. Calcule $\operatorname{cotg}\alpha$ dado que $2\operatorname{tg}^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$.

Resolução:

Resolvemos a equação do 2º grau com incógnita $\operatorname{tg}\alpha$, aplicando a definição de cotangente quando for determinado o valor da tangente:

$$2\operatorname{tg}^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha = -2 \end{cases}$$

Como $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = 2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -2 \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{-2} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -\frac{1}{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

42. Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{\operatorname{cossec}\alpha \cdot \sec\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$ b) $\operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{cossec}^2 x - 1)$

43. Determine sen x, se $4\operatorname{cossec}^2 x + \operatorname{cossec} x - 5 = 0$.

44. Determine cos x, se $\sec^2 x - \sec x - 2 = 0$.

17. Equações e inequações trigonométricas

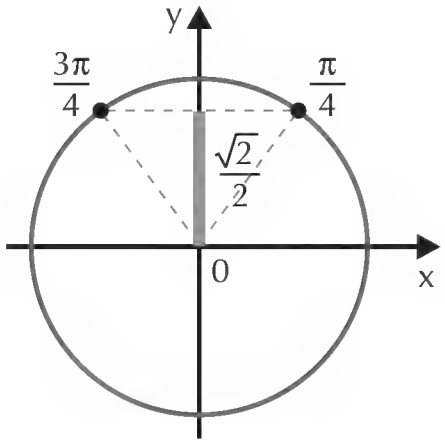
Equação trigonométrica é toda equação em que a incógnita é uma função trigonométrica; porém nem todos os arcos satisfazem essas equações. Para determinar esses arcos, recorremos ao ciclo trigonométrico sempre que necessário. As inequações se caracterizam pela presença de algum dos sinais de desigualdade.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Defina os valores de *x* para $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolução:

Queremos encontrar os arcos que tenham seno igual a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. No eixo dos senos do ciclo trigonométrico, procuramos este valor e, traçando uma reta paralela ao eixo dos cossenos, temos as extremidades dos arcos procurados. Veja a figura.



Note que entre 0 e 2π rad existem dois arcos, sendo que no primeiro quadrante o arco é $\dfrac{\pi}{4}$ rad e, utilizando a simetria do ciclo, no segundo quadrante o arco será:

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Como existem infinitos arcos com essas extremidades e no enunciado não é dado um intervalo para x, temos de dar a solução utilizando uma expressão geral. Assim:

para $\frac{\pi}{4}$ rad, temos: $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

para $\frac{3\pi}{4}$ rad, temos: $\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

O processo para se obter os arcos *por simetria*, que estão no 2º, 3º ou 4º quadrantes a partir de um arco α do 1º quadrante é o seguinte:

- no 2º quadrante, subtraímos de π, ou seja, o arco será $\pi - \alpha$;
- no 3º quadrante, somamos a π e o arco será $\pi + \alpha$;
- no 4º quadrante, subtraímos de 2π e o arco será $2\pi - \alpha$.

EXERCÍCIO PROPOSTO

45. Resolva as equações:

a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$, $0 \leq x \leq 2\pi$

c) $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $2 \text{ sen } x + 1 = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$

e) $-2 \text{ sen } x = \sqrt{3}$

f) $\text{sen } x = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$

g) $\text{sen}^2 x = 1$

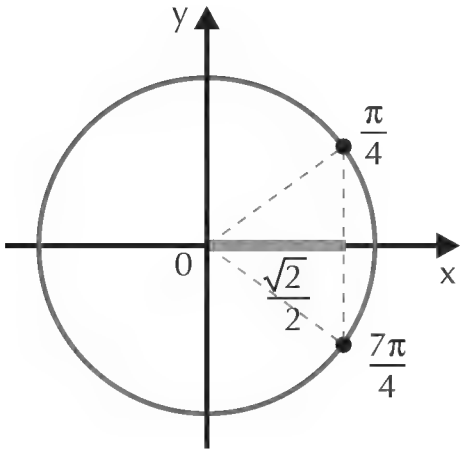
h) $2 \text{ sen}^2 x - 1 = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Defina os valores de x para que $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolução:

No eixo dos cossenos, marcamos o valor do cosseno dos arcos que estamos procurando, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Traçando uma paralela ao eixo dos senos, encontramos as extremidades dos arcos. Veja a figura.



No primeiro quadrante, sabemos que o arco é $\frac{\pi}{4}$ rad. No quarto quadrante, o arco procurado é:

$$2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

Como não existe um intervalo para o valor de x, a solução deve ser uma expressão geral para esses arcos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

46. Resolva as equações:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 \cos x = 1, 0 \leq x \leq 2\pi$

c) $4 \cos x = 2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3} + 2 \cos x = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

e) $\cos^2 x - 1 = 0$

f) $2 \cos^2 x - 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

47. (Mackenzie-SP) O conjunto-solução da equação $9^{\cos x} = \frac{1}{3}$ em $[0, 2\pi]$ é:

a) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

d) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

e) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

48. (UFAL) Considere as soluções reais da equação $2 \cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 3 = 0$ no intervalo $[0, \pi]$. A soma dessas soluções é:

a) $\frac{7\pi}{2}$ b) 3π c) $\frac{5\pi}{2}$ d) 2π e) $\frac{3\pi}{2}$

49. (UFSC) Determine o valor, em graus, do arco x, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ na equação $1 - \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 0$.

(*Sugestão:* substitua $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ e resolva a equação do 2º grau em sen x. Procure os valores de *x* no ciclo trigonométrico e observe que estes valores devem estar no primeiro quadrante.)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Defina os valores de *x* para $\sqrt{3}\ \operatorname{tg} x - 1 = 0$.

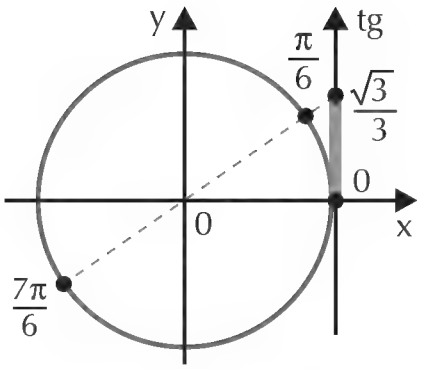
Resolução:

Inicialmente, isolamos a tg x:

$$\sqrt{3}\ \operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\ \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Procuramos os arcos no ciclo trigonométrico, sabendo que $\text{tg}\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Além do arco do primeiro quadrante, temos um no terceiro:

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}\ \text{rad}$$

A solução deve ser dada por meio de um expressão geral; para isto, note que, a partir de $\frac{\pi}{6}$, para chegarmos em $\frac{7\pi}{6}$, percorremos metade da circunferência, ou seja, π rad.

Então o conjunto-solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

50. Resolva as equações:

a) $2\ \text{tg}\ x = 0$

b) $\sqrt{3}\ \text{tg}\ x + 1 = 0$

c) $\text{tg}\ x = -\sqrt{3}$

d) $\text{tg}\ x = -1$

e) $\text{tg}^2\ x - 1 = 0$

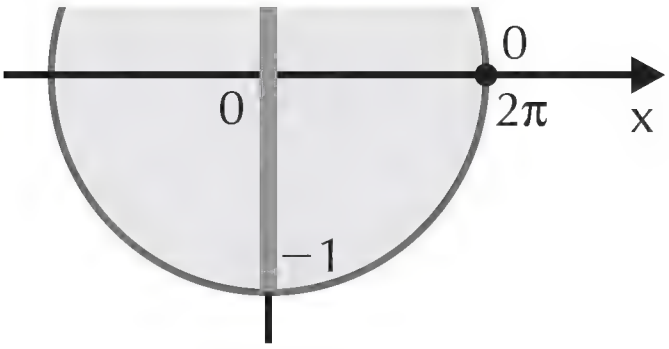
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Defina os valores de *x* para $\text{sen}\ x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Resolução:

Procuramos valores de *x* que substituídos na inequação tenham senos menores ou igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

No eixo dos senos, localizamos esse intervalo. Traçando a paralela, determinamos toda a região de arcos que satisfazem a inequação. Veja a figura.



ote que a leitura dos arcos deve partir de zero, então:

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi\right\}$$

efina os valores de *x* para $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

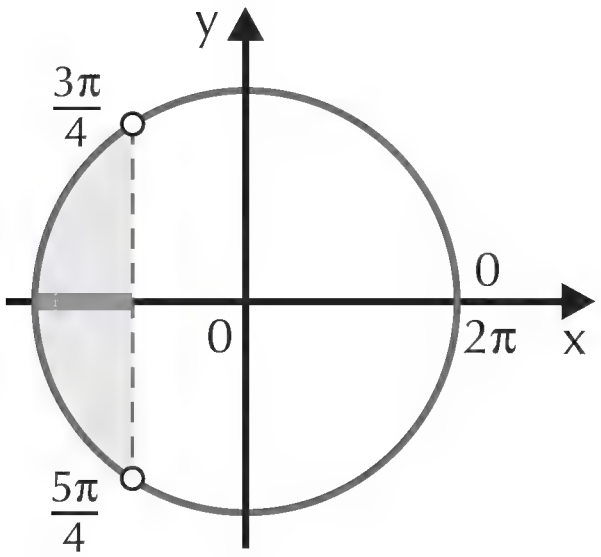
olução:

nicialmente, localizamos no eixo dos cossenos os valore

enores que $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Traçando a paralela, encontramos o

xtremos do intervalo:

$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad e } \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$



a) $\operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\cos x > 0$ f) $\operatorname{tg} x < 0$

b) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\operatorname{sen} x < 0$ g) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen} x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Resolva a inequação $\cos^2 x < \cos x$, dado que $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3. Determine o domínio de $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

4. Determine o domínio de $g(x) = \sqrt{2\cos x - 1}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

18. Transformações trigonométricas

As fórmulas a seguir permitem calcular o cosseno, o a tangente da soma e da diferença de dois ângulos.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$$

olução:

evemos obter uma soma ou diferença que resulte em 75
tilizando apenas os arcos notáveis. Por exemplo:

$$75° = 45° + 30°$$

rocedemos desta maneira porque conhecemos o sen
esses arcos. Então:

$$\text{sen } 75° = \text{sen } (45° + 30°)$$

plicamos a fórmula do seno da soma de dois arcos:

$$\text{en } (45° + 30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \text{sen } 30°$$

$$\text{en } (75°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

plicamos a definição de cossecante:

$$\text{ossec } 75° = \frac{1}{\text{sen } 75°} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{6 \cdot 2} = \frac{4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{4}$$

6. Calcule secante e cossecante de 105°.

7. Dado sen $\alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determine:

a) sen $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ b) cos $\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ c) tg $\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right.$

8. Sabendo que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, determine o valor de A, sendo:

$A = (\text{sen } \alpha + \cos \beta)^2 + \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta + 2 \text{ sen } \beta \cdot \cos \alpha$

19. Funções trigonométricas

9.1 Período

Dizemos que o período de uma semana é 7 dias, d
mês é 30 dias e de um ano é 365 dias. Neste caso, pod
izer que o período é o tempo necessário (em dias) para
m ciclo se complete. Aplicamos o mesmo conceito pa
unções trigonométricas, pois os arcos são infinitos, poré
alores de seno e cosseno se repetem após uma volta cor
sobre o ciclo trigonométrico.

Uma função é periódica se existe um número $k > 0$ tal

$$f(x + k) = f(x)$$

9.2 Função seno

A função seno é a função que associa a cada número r
seno de x:

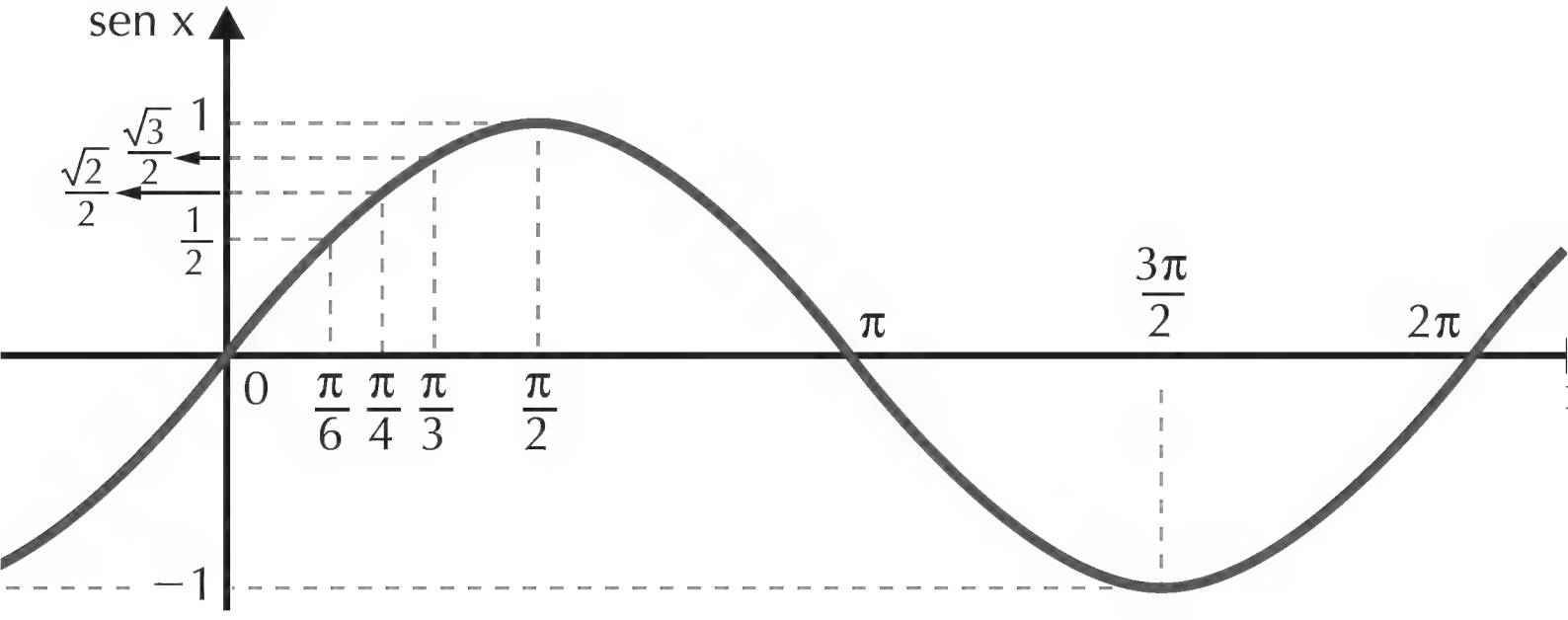
$$f(x) = \text{sen } x$$

Como x é um número real, dizemos que o domínio da

cos entre 0 e 2π.

0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

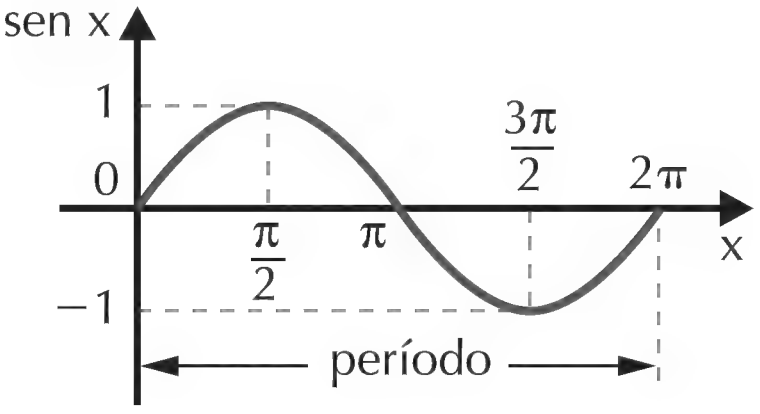
partir da tabela, construímos o gráfico. A curva obtida
nada de *senóide*.



eríodo: 2π

$= \mathbb{R}$

$m(f) = [-1, 1]$



unção cosseno

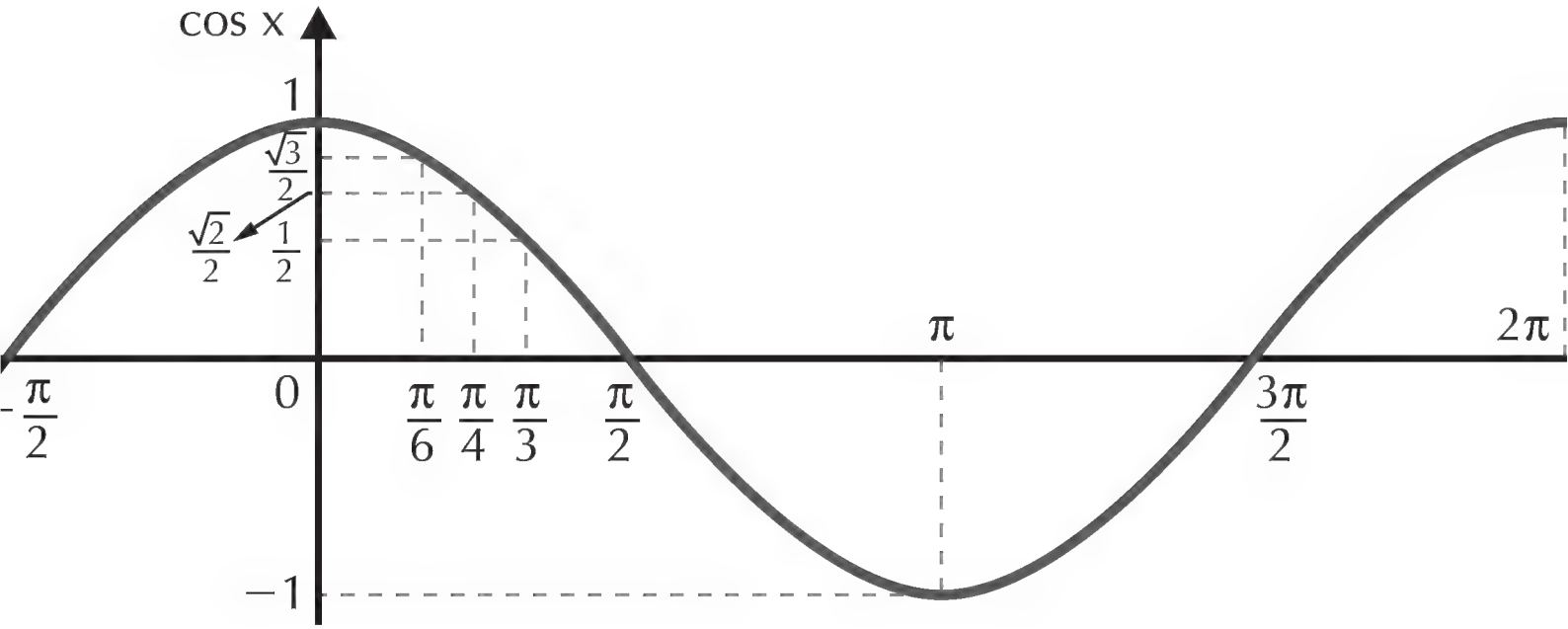
toda função que associa um número real *x* ao cos x:

$$f(x) = \cos x$$

domínio da função é $\mathbb{R}$, e o conjunto imagem é o inte

x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{}$

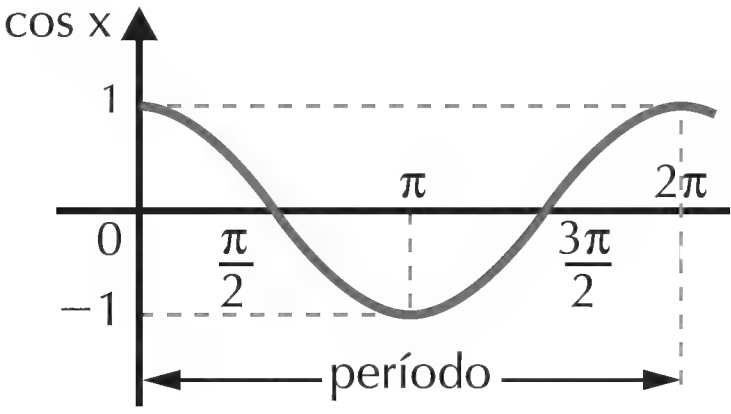
O gráfico da função cosseno é chamado de *cossenóid*



período: 2π

$D = \mathbb{R}$

$Im(f) = [-1, 1]$



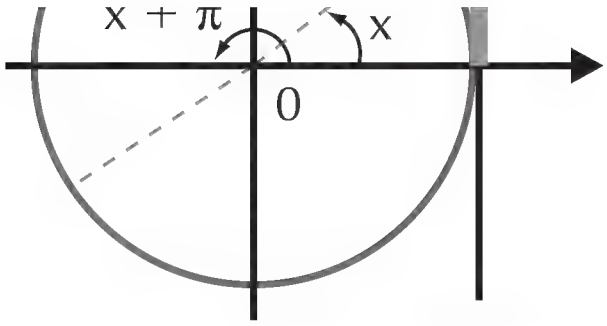
9.4 Função tangente

É toda função que associa um número real *x* a tg x.

$$f(x) = \text{tg } x$$

Devemos lembrar que a função tangente não está def

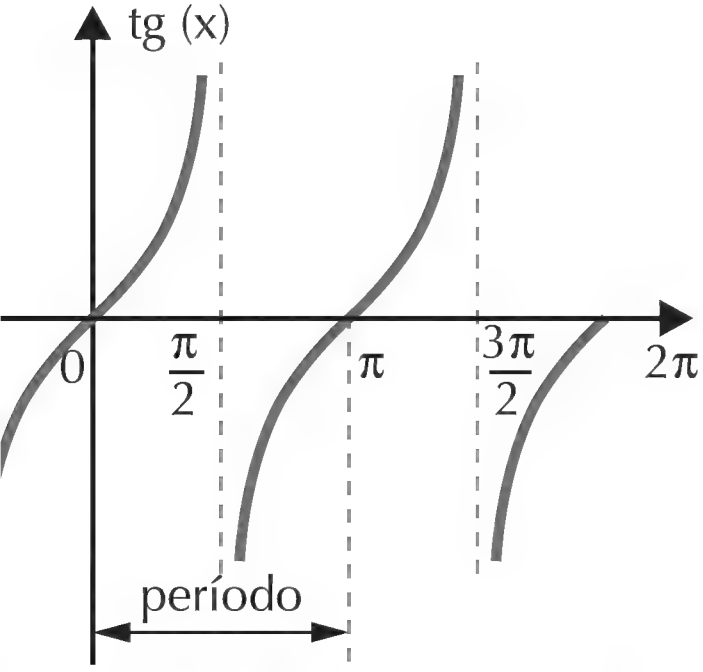
π rad, então o período da
ão tangente é π.



abelando valores da tangente, temos:

x	tgx
$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π	0
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$

curva que representa a fun-
é chamada de *tangentóide*.



período: π

$$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

RCÍCIO RESOLVIDO

etermine o período das funções:

) $f(x) = 2 + \cos x$

olução:

sen 3x tem período $\frac{2\pi}{3}$.

De modo geral, para qualquer função sen (mx) ou cos
o período é $\frac{2\pi}{|m|}$.

c) $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Resolução:

Assim como a função seno, o período de sen $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

O ciclo estará completo se $x - \frac{\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{3}$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

9. Determine o período das funções:

$f(x) = 3 + \text{sen } x$

$f(x) = 1 + \cos x$

$f(x) = \text{sen } 5x$

$f(x) = \cos 4x$

$f(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$

$f(x) = \cos \frac{x}{3}$

$f(x) = \text{sen } (x + \pi)$

0. (UFRN) Em um triângulo retângulo, os catetos medem

a) $\text{tg } \beta = 1{,}333...$

b) $\text{sen } \beta = 0{,}8$

c) $\text{tg } \beta = 1{,}25$

d) $\text{sen } \beta = 0{,}6$

e) $\cos \beta = 0{,}75$

61. (UFRR) O comprimen
hipotenusa de um triâ
retângulo é de 5 cm. Sa
que um dos catetos é
maior que o outro. Q
medida do menor catet

62. (UFSE) Se os raios s

16,6 m d) 13,3 m
15,5 m e) 12,2 m
14,4 m
300

UFPA) Se α é o ângulo posto ao menor lado de um iângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 m e a soma dos catetos é 17 m, o valor de cos α é:

$\frac{15}{13}$ d) $\frac{5}{13}$

$\frac{17}{13}$ e) $\frac{1}{13}$

$\frac{12}{13}$

UFMS) Um observador vê m prédio mediante um ângulo visual α. Afastando-se o prédio a uma distância e 7 metros, o observador vê o prédio mediante um ngulo visual β. Sabendo-se ue $\alpha = 45°$ e $\text{tg}\ \beta = \frac{5}{6}$, etermine em metros a altura do prédio.

catetos, em cm, é:

a) 4 d) $2\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{5}$ e) 2

c) 3

66. (Cesgranrio-RJ) Um ciclis de prova de resistência dev percorrer 500 km sobre um pista circular de raio 200 m O número mais próximo d voltas que ele deve dar é:

a) 100 d) 400

b) 200 e) 500

c) 300

67. (Fuvest-SP) Quantos grau mede aproximadamente u ângulo de 0,105 rad?

a) 2 c) 6 e) 10

b) 4 d) 8

68. (Fuvest-SP) Dentre os núme ros abaixo, o mais próxim de sen 50° é:

a) 0,2 c) 0,6 e) 1,0

b) 0,4 d) 0,8

69. (UFSC) O maior valor num rico que y pode assum

a) possui três raízes reais e distintas.

b) possui duas raízes.

c) possui uma infinidade de raízes.

d) não possui raízes.

e) possui uma única raiz.

71. (Fuvest-SP) O valor de $(\text{tg } 10° + \text{cotg } 10°) \cdot \text{sen } 20°$ é:

a) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{2}$

b) 1 e) 4

c) 2

72. (Fuvest-SP) No intervalo $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, a equação $\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} + \cos x = -\sqrt{2}$:

a) não admite solução.

b) admite como solução $x = \frac{3\pi}{4}$.

c) admite como solução $x = \frac{2\pi}{3}$.

d) admite como solução $\frac{5\pi}{4}$.

a) $2\frac{3}{5}$ d) $2\frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{4}{5}$

74. (Enem-MEC) Se $0° < x$ e $\cos x = \frac{1}{4}$, então x entre:

a) 0° e 30° d) 60° e

b) 30° e 45° e) 75° e

c) 45° e 60°

75. (FEI-SP) O valor de $y = (\cos a + \cos b)^2 + (\text{sen } a - \text{sen } b)^2$, para $a + b = \frac{\pi}{2}$, é:

a) $\frac{1}{2}$ d) 1

b) 2 e) 4

c) 0

76. (Mackenzie-SP) Se $N = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \text{co}$ então $\log_2 N$ vale:

a) 2 d) -2

Capítulo 7

Seqüências e Progressões

O estudo de seqüências lógicas despertou o interesse de vários pesquisadores. Leonardo Fibonnaci (1170-1250), entretanto, foi o primeiro a propor os primeiros problemas sobre seqüências, por meio da observação de fenômenos naturais. Seu problema mais famoso é:

"Um casal de coelhos torna-se produtivo após 2 meses de vida; a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais serão ao final de um ano?"

Ao final do ano, teremos 376 casais. A maneira mais simples de demonstração é utilizando a célebre seqüência 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

1. Lei de formação

Existem diversas seqüências na natureza (a ordem das cores do arco-íris, por exemplo), mas as que nos interessarão serão apenas as numéricas.

De modo geral, temos:

Seqüências finitas $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, como os números naturais ímpares menores que 20 (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19) ou os múltiplos positivos de 4 menores que 24 (0, 4, 8, 12, 16, 20); e *seqüências infinitas* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, $n \in \mathbb{N}^*$,

como os números naturais (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...), os números inteiros (..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...) ou os números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, ...).

Utilizamos uma letra com índice numérico para localizar um elemento da seqüência. Por exemplo:

a_1 = primeiro termo da seqüência (que também pode aparecer como a_0);

a_2 = segundo termo da seqüência;

a_3 = terceiro termo da seqüência;

⋮ ⋮

a_n = enésimo termo da seqüência.

Observe a seqüência de números ímpares positivos:

(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...).

É possível determinar o próximo elemento somando 2 ao último termo; dizemos então que existe uma lei de formação (fórmula) dada por $a_n = 2n + 1$.

Na seqüência de números primos

(2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, ...)

não é possível determinar uma lei de formação.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine as seqüências dadas pelas fórmulas:

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1}^2 + 1 \end{cases}$

$n \geqslant 2$ (*observe sempre a condição de existência*)

Resolução:

Como foi dado o primeiro termo, substituiremos $n = 2$ na fórmula para determinar o segundo termo:

$$a_2 = a_{2-1}^2 + 1 = (1)^2 + 1 = 2$$

Procedemos do mesmo modo para determinar os outros termos, atribuindo a n valores ordenados maiores que 2:

$n = 3 \Rightarrow a_3 = a^2_{3-1} + 1 = a^2_2 + 1 = (2)^2 + 1 = 5$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = a^2_{4-1} + 1 = a^2_3 + 1 = (5)^2 + 1 = 26$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = a^2_{5-1} + 1 = a^2_4 + 1 = (26)^2 + 1 = 677$

⋮

A seqüência infinita procurada é:

$$(1, 2, 5, 26, 677, \ldots)$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine as seguintes seqüências dadas pelas fórmulas:

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 5,\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{2},\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_{n+1} = 2a_n,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. Progressões Aritméticas (P.A.)

Observe a seguinte seqüência:

A: (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 ...)

Em A, para se obter um elemento, basta somar 3 ao anterior.

Toda seqüência em que, *a partir de um termo conhecido, soma-se uma constante para obter o seguinte* é chamada de *progressão aritmética* ou P.A. A constante que é somada a cada elemento é chamada de *razão* da P.A. e simbolizada pela letra *r*.

Genericamente, temos:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots) \text{ é P.A.} \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} + r,\ n \geqslant 2$$
$$r = a_n - a_{n-1}$$

2.1 Classificação da P.A.

Uma P.A. de razão *r* pode ser:

- *crescente* → se a razão for um número positivo.
  (2, 4, 6, 8, 10, ...) é P.A. crescente em que r = 2
- *decrescente* → se a razão for um número negativo.
  (9, 6, 3, 0, −3) é P.A. decrescente em que r = −3
- *constante* → se a razão for zero.
  (1, 1, 1, 1, 1, ...) é P.A. constante

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine a razão e classifique a P.A. (x + 1, x − 3, 2x).

Resolução:

Para determinar o valor de *x*, podemos aplicar a definição de razão, utilizando a igualdade $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, ou utilizar a propriedade da média aritmética, que é conseqüência dessa definição: o segundo termo é a média aritmética do primeiro e terceiro termos:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow x - 3 = \frac{x + 1 + 2x}{2} \Rightarrow x = -7$$

Substituindo *x* nos elementos da P.A.:

$$a_1 = x + 1 = -7 + 1 = -6$$
$$a_2 = x - 3 = -7 - 3 = -10$$
$$a_3 = 2x = 2 \cdot (-7) = -14$$

A P.A. procurada é (−6, −10, −14).

Obtida a seqüência, podemos determinar a razão:

$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = -10 - (-6) \Rightarrow r = -10 + 6 \Rightarrow r = -4$

Como *r* é negativo, a P.A. é *decrescente*.

2. (UFMG) Em um triângulo retângulo, de perímetro 36 cm, os lados estão em progressão aritmética. Determine a razão da progressão aritmética e a medida dos lados do triângulo.

Resolução:

Lembrando que o perímetro é a soma dos lados de um polígono, temos que a soma dos lados do triângulo é 36 cm; se os lados estão em P.A., genericamente podemos representá-los por:

$$(x - r, x, x + r)$$

então:

$$x - r + x + x + r = 36$$

$$3x = 36 \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

Substituindo o valor encontrado, a P.A. será:

$$(12 - r, 12, 12 + r)$$

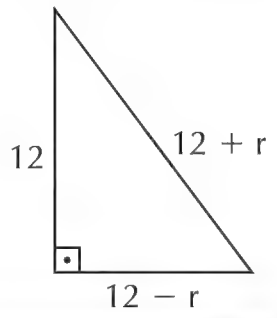
Sendo o triângulo retângulo, sabemos que a hipotenusa é o maior lado.

Como o triângulo é retângulo, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para determinar o valor de *r*:

$$(12 + r)^2 = 12^2 + (12 - r)^2$$

$$144 + 24r + r^2 = 144 + 144 - 24r + r^2$$

$$48r = 144 \Rightarrow r = 3$$



As medidas dos lados do triângulo são: 9 cm, 12 cm e 15 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. Determine a razão de cada P.A., classificando-as em crescente, decrescente ou constante.

a) $(-6, -2, 2, 6, 10)$

b) $(-1, -6, -11, -16)$

c) $\left(-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

d) $(-7, -7, -7, -7)$

e) $\left(6\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$

f) $(9, 9, 9, 9)$

3. Considerando a P.A. (m − 7, m, 2m + 1), determine *m*.
4. Escreva os quatro primeiros termos da P.A., onde $a_1 = -2$ e $r = \frac{1}{5}$.
5. Três números estão em P.A. Sendo 9 a soma dos três e o produto −21, determine a P.A. sabendo que é crescente.
6. Em uma P.A. decrescente, os três primeiros termos somam 12 e têm produto 48. Determine a P.A.

3. Fórmula do termo geral da P.A.

Sabemos que é possível obter um termo de uma P.A. (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...) de razão *r* somando a razão ao termo anterior. Mas há uma maneira de, conhecendo-se o primeiro termo (a_1) e a razão r, determinar qualquer termo da P.A. Isso pode ser feito pela utilização da fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine o 21º termo da P.A., onde o primeiro termo é 3 e a razão é 5.

Resolução:

Basta substituir na fórmula do termo geral, onde n = 21.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{21} = a_1 + (21 - 1) \cdot r = a_1 + 20r = 3 + 20 \cdot 5$$

$$a_{21} = 103$$

2. Em uma P.A. de razão 9, sendo o primeiro termo 30 e o último 291, determine o número de elementos da P.A.

Resolução:

Sendo *n* o número de elementos da P.A., podemos substituir os valores dados na fórmula do termo geral, onde o último elemento é $a_n = 291$:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$291 = 30 + (n - 1) \cdot 9 \Rightarrow 291 - 30 = 9n - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9n - 9 = 261 \Rightarrow 9n = 270$$

$$n = 30$$

Portanto a P.A. tem 30 elementos.

3. Quantos são os múltiplos de 3 entre 10 e 1.000.

Resolução:

Toda seqüência de múltiplos de um número é uma P.A. Como queremos múltiplos de 3, a razão é r = 3. Queremos determinar o número de múltiplos de 3, então procuramos o valor de *n*. Para utilizar a fórmula do termo geral, precisamos do primeiro e do último termos da P.A.:

a_1 = primeiro múltiplo de 3 maior que 10, então $a_1 = 12$;

a_n = último múltiplo de 3 menor que 1000, então $a_n = 999$.

Na fórmula temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$999 = 12 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow 3n - 3 = 987 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3n = 990 \Rightarrow n = 330$$

Portanto: existem 330 múltiplos de 3 entre 10 e 1.000

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Determine o que se pede em cada P.A.

   a) a_{15}, sendo $a_1 = 3$ e $r = \frac{1}{2}$

   b) a_{30}, sendo $a_1 = -10$ e $r = 7$

   c) a_{18}, sendo $a_1 = 5$ e $r = 4$

8. Obtenha a razão da P.A. onde o primeiro termo é 7 e o nono é 87.

9. Obtenha o primeiro termo da P.A. em que o 15º termo é 105 e a razão é 3.

10. Quantos elementos tem a P.A. finita (21, 18, 15, ..., −27)?

11. Insira 13 meios aritméticos entre os números 5 e 47.

12. Determine a razão da P.A. que se obtém inserindo dez meios aritméticos entre os números −7 e 37.

13. Quantos múltiplos de 7 existem entre os números 100 e 1.000?

14. Quantos múltiplos de 4 existem entre os números 50 e 500?

4. Soma dos termos de uma P.A. finita

Certo dia, um professor muito exigente manda seus alunos, que em média tinham 10 anos, somarem todos os números naturais de 1 a 100. Para o espanto de todos, o pequeno Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que se tornou um dos matemáticos mais importantes da história, apresenta rapidamente a solução.

A soma proposta pelo professor foi:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + ... + 93 + 94 + 95 +$

$+ 96 + 97 + 98 + 99 + 100$

Gauss observou que a soma dos termos eqüidistantes dos extremos era constante, ou seja:

$$a_1 + a_{100} = 1 + 100 = 101$$
$$a_2 + a_{99} = 2 + 99 = 101$$
$$a_3 + a_{98} = 3 + 98 = 101$$
$$a_4 + a_{97} = 4 + 97 = 101$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{50} + a_{51} = 50 + 51 = 101$$

Tendo a seqüência cem termos, então existem 50 somas iguais, portanto:

$$S = 50 \cdot 101 = 5.050$$

O pequeno Gauss, intuitivamente, utilizou a fórmula da soma dos termos de uma P.A. finita:

> A soma dos *n* termos de uma P.A. é igual ao produto da média aritmética dos extremos pelo número de termos da P.A.

Esse raciocínio expresso em linguagem matemática fica assim:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Segundo o que observou Gauss, podemos extrair a seguinte propriedade:

> A soma de termos eqüidistantes dos extremos de uma P.A. é igual à soma dos extremos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine a soma dos 30 primeiros termos da P.A. (2, 4, 6, 8, ...)

Resolução:

Queremos calcular a soma de 30 termos, então, n = 30. Observando a seqüência, deduzimos que r = 2 e $a_1 = 2$. Para utilizarmos a fórmula, precisamos do 30º termo; recorremos, então, à fórmula do termo geral:

$$a_{30} = a_1 + 29 \cdot r \Rightarrow = 2 + 29 \cdot 2 \Rightarrow = 60$$

Portanto:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} \Rightarrow = (2 + 60) \cdot 15 = 62 \cdot 15 \Rightarrow$$

$$S_{30} = 930$$

2. Determine o número de termos de uma P.A. finita, sendo sua soma 10, o primeiro termo −10 e o último 14.

Resolução:

Substituímos os dados na fórmula da soma, determinando o valor de *n* que corresponde ao número de termos da P.A.:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 10 = \frac{(-10 + 14_n) \cdot n}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20 = 4n \Rightarrow n = 5$$

A P.A. tem 5 elementos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

15. Calcule a soma dos 12 primeiros termos da P.A. (−7, −4, −1, ...).
16. Calcule a soma dos 25 primeiros termos da P.A. (19, 14, 9, 4, ...).
17. Uma P.A. finita de razão $\frac{1}{2}$ tem como primeiro termo o número 4. Determine a soma dos 20 primeiros termos.
18. Determine o número de elementos de uma P.A. finita que tem soma 72, sendo o primeiro termo 18 e o último −9.
19. Determine o sexto termo de uma P.A. finita, sabendo que o primeiro termo é 4 e a soma dos seis primeiros termos é 84.
20. (FGV-SP) A soma dos múltiplos de 7 entre 20 e 1.000 é:

    a) 70.539 b) 71.400 c) 71.540 d) 76.500 e) 71.050
21. A soma dos *n* primeiros termos de uma P.A. é $2n^2 + 1$. Determine a P.A.
22. (Fuvest-SP) Sabendo que a soma dos nove primeiros termos de uma P.A. é 17.874, calcule seu quinto termo.

5. Progressões Geométricas (P.G.)

Dizemos que uma seqüência é *progressão geométrica* ou P.G. se *cada termo é obtido multiplicando o anterior por uma constante*. Essa constante é chamada de *razão* da P.G. e simbolizada pela letra *q*. Exemplos:

(2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) é P.G. em que a razão é 2 (q = 2), pois:

$2 \cdot 2 = 4$; $4 \cdot 2 = 8$; $8 \cdot 2 = 16$ ... e assim sucessivamente.

Portanto, determinamos a razão da P.G. dividindo um termo por seu antecessor. Assim:

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ é P.G. $\Leftrightarrow a_n = (a_{n-1}) \cdot q$, $n \geqslant 2$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Desta maneira, podemos deduzir que, se (a_1, a_2, a_3) é uma P.G., a_2 é igual à razão geométrica dos outros dois elementos, ou, em linguagem matemática:

$$a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3}$$

Exemplos:

Se (4, 16, 64) é P.G., então $16 = \sqrt{4 \cdot 64}$.

Se (25, 125, 625) é P.G., então $125 = \sqrt{25 \cdot 625}$.

5.1 Classificação da P.G.

Dizemos que uma P.G. é:

- *crescente* → se cada termo é maior que seu antecessor; neste caso, $q > 1$.

  $(2, 4, 8, 16, 32, \ldots) \Rightarrow q = 2$

- *decrescente* → se cada termo é menor que seu antecessor; neste caso, $0 < q < 1$.

  $\left(50, 10, 2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}\right) \Rightarrow q = \frac{1}{5}$

- *alternante* → se cada termo tem sinal contrário ao antecessor; neste caso $q < 0$.

  $(-5, 10, -20, 40, -80) \Rightarrow q = -2$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine a razão de cada P.G.:

a) $(1, \sqrt{5}, 5)$

b) $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$

c) $(-1, 4, -16, 64, -256)$

d) $(p^{-2}, p^{-1}, 1, p, p^2)$

Resolução:

Dada a seqüência, encontramos o valor da razão dividindo um termo pelo seu antecessor:

a) $q = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

b) $q = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

c) $q = -\frac{4}{1} = -4$

d) $q = \frac{p}{1} = p$

2. Determine a P.G. $(k - 1, 2k, 4k + 5)$, $k \neq 0$.

Resolução:

Para determinar a P.G., precisamos do valor numérico de *k*. Aplicamos, então, a definição de razão:

$$\frac{2k}{k-1} = \frac{4k+5}{2k} \Rightarrow \cancel{4k^2} = \cancel{4k^2} + 5k - 4k - 5 \Rightarrow k = 5$$

Substituindo o valor de *k*, temos:

$k - 1 = 4 \Rightarrow 2k = 10 \Rightarrow 4k + 5 = 25 \Rightarrow$ A P.G. é (4, 10, 25)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

23. Determine a razão de cada P.G.:

a) $(2, -6, 18, -54, \ldots)$

b) $(25, 5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots)$

c) $(-\sqrt{7}, -7, -7\sqrt{7}, -49)$

d) $(3, 12, 48, 192)$

24. Determine $p \neq 0$ para que $(4p, 2p - 1, p + 3)$ seja P.G.

25. Determine a P.G. decrescente $(-1, x, 5x - 6)$, sendo $x \neq 0$.

26. Três números estão em P.G. crescente, tal que a soma dos números é -7 e o produto é -8. Determine a P.G.

27. Determine a P.G. decrescente formada por três números cuja soma é 13 e o produto é 27.

28. (PUC-SP) Se a seqüência $(4x, 2x + 1, x - 1)$ é uma P.G., então o valor de x é:

a) $-\frac{1}{8}$ b) -8 c) -1 d) 8 e) $\frac{1}{8}$

6. Fórmula do termo geral de uma P.G.

Conhecendo o primeiro termo, a_1, e a razão, q, de uma P.G., podemos determinar qualquer termo utilizando a fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dada a P.G. (1, 2, 4, 8, 16, ...), determine o décimo termo.

Resolução:

Analisando a P.G., verificamos que o primeiro termo é 1 e a razão é 2. Aplicando a fórmula, temos:

$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} \Rightarrow a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow a_{10} = 1 \cdot 2^9 \Rightarrow a_{10} = 512$

2. Quantos elementos tem a P.G. de razão $\sqrt{3}$, onde o primeiro termo e o último são respectivamente $\sqrt{3}$ e 81.

Resolução:

A letra *n* representa o número de elementos da P.G., sendo, portanto, o último termo a_n. Basta substituir os valores conhecidos na fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 81 = \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{n-1} = \frac{81}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{n-1} = \frac{81\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{n-1} = 27\sqrt{3}$$

Utilizamos as propriedades de potências para resolver a equação exponencial:

$$(3^{\frac{1}{2}})^{n-1} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{\frac{n-1}{2}} = 3^{\frac{7}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow n = 8$$

Portanto, a P.G. tem 8 elementos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

29. Determine o sexto termo da P.G. $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\right)$.

30. Determine o 11º termo da P.G. $(1, -2, 4, \ldots)$.

31. Determine o primeiro termo de uma P.G., sabendo que o sétimo é $8\sqrt{2}$ e a razão é $\sqrt{2}$.

32. Sabe-se que o terceiro e o quinto termos de uma P.G. são, respectivamente, 7 e 49. Determine o oitavo termo.

33. (UFSC) Em uma progressão geométrica, o terceiro termo é $\frac{16}{9}$ e o sétimo é 144. Determine o seu quinto termo.

7. Soma dos termos de uma P.G. finita

Sendo a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ de razão q, a fórmula para calcular a soma de todos os seus termos é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} \text{ ou } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ para } q \neq 1$$

Se a razão da P.G. é 1, ou seja, no caso de todos os termos serem iguais, a soma dos termos da P.G. será dada por:

$$S_n = n \cdot a_1, \text{ se } q = 1$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.G. (2, 4, 8, 16, ...)

Resolução:

Podemos observar que o primeiro termo é 2 e a razão é 2. Utilizamos a fórmula da soma da P.G. finita para n = 10:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{10} = 2 \cdot (1.024 - 1) \Rightarrow \boxed{S_{10} = 2.046}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

34. Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$.

35. Calcule a soma dos seis primeiros termos da P.G. finita em que o primeiro termo é -3 e a razão é 3.

36. Determine o primeiro termo de uma P.G. finita em que a soma de seus quatro primeiros termos é 156, sabendo que a razão é 5.

37. Quantos elementos tem a P.G. cuja soma é -252, o primeiro termo é -4 e a razão é 2?

38. (UFRR) Em uma experiência de laboratório, um frasco recebe, no primeiro dia do mês, três gotas de um determinado líquido; no segundo dia recebe nove gotas; no terceiro dia recebe 27 gotas; e assim por diante. No dia em que recebeu 2.187 gotas ficou completamente cheio. Em que dia do mês isso aconteceu?

8. Soma dos termos da P.G. infinita

A fórmula para somar os termos de uma P.G. infinita é dada por:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Observe que a razão q deve variar entre 0 e 1.

Leia sobre os Padrões na natureza definidos por seqüências numéricas no Encarte Colorido.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule a soma da P.G. $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$.

Resolução:

Sendo o primeiro termo 1 e a razão $\frac{1}{3}$, podemos utilizar a fórmula:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

$$S_n = \frac{3}{2}$$

2. Resolva a equação $x + \frac{x}{5} + \frac{x}{25} + \frac{x}{125} + \ldots = 12$.

Resolução:

Observe que o primeiro membro da equação é a soma de uma P.G. infinita, portanto essa soma é igual a 12. Utilizamos a fórmula substituindo a_1 por x e q por $\frac{1}{5}$:

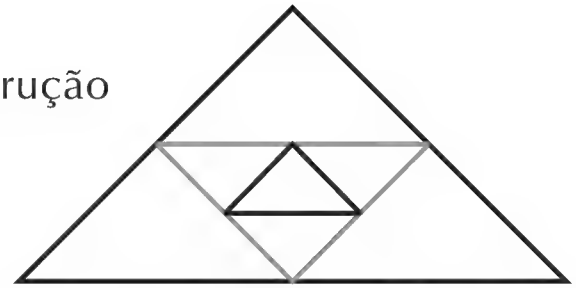
$$S_n = 12 \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = 12 \Rightarrow \frac{x}{1-\frac{1}{5}} = 12 \Rightarrow$$

$$x = 12 - \frac{12}{5} = \frac{60-12}{5} \Rightarrow x = \frac{48}{5}$$

3. A medida do lado de um triângulo eqüilátero é 4 cm. Unindo-se os pontos médios de seus lados, obtém-se um segundo triângulo eqüilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados deste novo triângulo, obtém-se um terceiro e assim por diante, indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

Resolução:

Fazendo uma figura da construção desses triângulos, temos:



Conforme a construção, cada novo triângulo é obtido unindo-se os pontos médios do triângulo anterior. Então, se o lado do triângulo maior é 4, o próximo tem lado 2, o próximo tem lado 1 e assim sucessivamente.

O perímetro do maior é $3 \cdot 4 = 12$, o segundo tem perímetro $3 \cdot 2 = 6$, o terceiro tem perímetro $3 \cdot 1 = 3$ etc. A soma de todos os perímetros é:

$$12 + 6 + 3 + \ldots$$

Trata-se de uma P.G. infinita de razão $\frac{1}{2}$, então:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = 24 \text{ cm}}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

39. Calcule a soma de cada P.G.

a) $\left(1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, \frac{8}{125}, \ldots\right)$ b) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right)$ c) $\left(1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \ldots\right)$

40. Calcule o primeiro termo de uma P.G. infinita cuja soma é $\frac{100}{9}$ e a razão é $\frac{1}{10}$.

41. Calcule a razão da P.G. infinita cuja soma é $\frac{2}{3}$ e o primeiro termo é 1.

42. (UFPI) O valor de x na equação $\frac{2x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x}{24} + \frac{x}{96} + \ldots = 4$ é:

a) 4,0 b) 4,5 c) 5,0 d) 5,5 e) 6,0

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

43. (Fuvest-SP) Em uma progressão aritmética de termos positivos, os três primeiros termos são $1 - a$, a, $\sqrt{11-a}$. O quarto termo desta P.A. é:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

44. (UFMS) Numa P.A., o 5º termo é 250 e o 3º termo é 128. Determine a razão da P.A.

45. (PUC-SP) Se o 4º e o 9º termos de uma progressão aritmética são, respectivamente, 8 e 113, então a razão *r* da progressão é:
a) $r = 20$ c) $r = 22$ e) $r = 24$
b) $r = 21$ d) $r = 23$

46. (UFRR) Sabendo que a soma dos nove primeiros termos de uma P.A. é 819, calcule o valor do seu 5º termo.

47. (Ufes) Para a exibição de um *show*, as 800 cadeiras de um teatro de arena serão dispostas em filas circulares, com 20 cadeiras na primeira fila, 24 na segunda, 28 na terceira, e assim sucessivamente. Quantas filas serão dispostas no teatro?

48. (Mackenzie-SP) Seja x o 30º termo da P.G. (2, 4, 8, ...). O valor de $\log_4 x$ é:
a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) 35

49. (UFSE) Numa progressão geométrica, o segundo termo é -2 e o quinto termo é 16. A razão dessa progressão é:
a) -3 c) 2 e) 4
b) -2 d) 3

50. (Fuvest-SP) O 5º e o 7º termos de uma P.G. de razão positiva valem, respectivamente, 10 e 16. O sexto termo dessa P.G. é:
a) 13 c) 4 e) 10
b) $10\sqrt{6}$ d) $4\sqrt{10}$

51. (Ufes) Em um triângulo, a medida de um lado, a medida da altura correspondente e a medida da área formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão 8. Então, a medida desse lado é
a) 32 c) 8 e) 2
b) 16 d) 4

52. (FGV-SP) A raiz da equação $x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = 2$ é
a) $\frac{1}{3}$ c) 1 e) $\frac{5}{3}$
b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{3}$

53. (PUC-SP) Somando os *n* primeiros termos da seqüência (1, -1, 1, -1, ...) encontramos:
a) n b) $-n$ c) 0 d) 1
e) 0 quando n épar e 1 quando n é ímpar

Capítulo 8

Matrizes e Determinantes

As matrizes ordenam e simplificam os problemas, contribuindo para a resolução de vários tipos de questões, sendo utilizadas na Estatística, na Física Atômica, na Economia, enfim, na Matemática Pura e Aplicada.

Um dos objetivos da teoria dos determinantes é solucionar, com mais rapidez, sistemas de equações do 1º grau com muitas equações e incógnitas.

Destacaram-se, no estudo dos determinantes, os matemáticos G. Cramer (1704-1752) e C. G. Jacobi (1804-1851).

1. Definição

Uma matriz é uma tabela de números reais dispostos segundo linhas horizontais e colunas verticais. Por exemplo, o consumo de sucos, em uma lanchonete, pode ser indicado em forma de matriz:

	Laranja	Mamão	Abacaxi	Maracujá
mesa I	5	2	3	1
mesa II	3	4	6	2
mesa III	7	1	0	5

O conjunto ordenado dos números que formam a tabela, é denominado *matriz*, e cada número pertencente a ela é chamado de *elemento da matriz*.

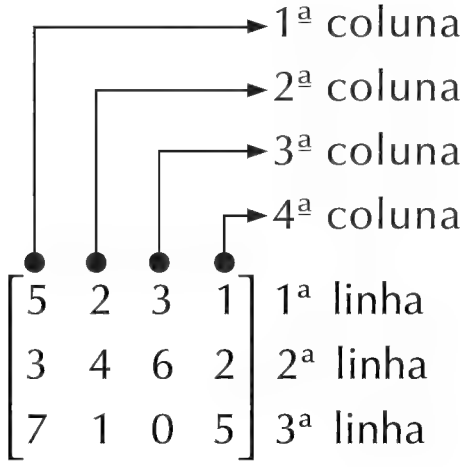
$$\begin{matrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{matrix}$$

Para indicarmos uma matriz, usamos a seguinte notação:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Tipo ou ordem de uma matriz

As matrizes são classificadas de acordo com o seu número de linhas e de colunas. Assim, a matriz representada ao lado é denominada matriz do tipo, ou ordem, 3×4 (lê-se três por quatro), pois tem três linhas e quatro colunas.



3. Representação genérica de uma matriz

Costumamos representar uma matriz por uma letra maiúscula (A, B, C...), indicando sua ordem no lado inferior direito da letra.

Quando desejamos indicar a ordem de modo genérico, fazemos uso de letras minúsculas. Exemplo: $A_{m \times n}$.

Da mesma maneira, indicamos os elementos de uma matriz pela mesma letra que a denomina, mas em minúscula. A linha e a coluna em que se encontra tal elemento é indicada também no lado inferior direito do elemento. Exemplo: a_{11}.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ onde } m, n \in \mathbb{N}^*$$

Para indicar uma matriz qualquer, de modo genérico, usamos a seguinte notação:

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, onde *i* representa a linha e *j*, a coluna em que se encontra o elemento.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, determine a linha e a coluna as quais cada elemento pertence.

Resolução:

$a_{11} = 3$; $a_{12} = 5$ ...

2. Calcule os elementos da matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$, onde $a_{ij} = 2i + j$.

Resolução:

Como a matriz A é de ordem 3×2, então sua representação genérica, é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Vamos calcular agora os elementos a_{ij} de $A_{3 \times 2}$:

$a_{ij} = 2i + j$

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

$a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$a_{31} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$a_{32} = 2 \cdot 3 + 2 = 8$

Logo, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule a matriz $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$, dada por $b_{ij} = 2i^2 - 3j$.
2. Determine a matriz $C = [c_{ij}]_{4 \times 2}$, onde

$$c_{ij} = \begin{cases} -2, \text{ se } i \leq j \\ 1, \text{ se } i > j \end{cases}$$

4. Igualdade de matrizes

Duas matrizes A e B são iguais quando apresentam a mesma ordem e seus elementos correspondentes forem iguais.

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} (5-2) & (1+4) \\ (6+2) & (2 \times 2) \end{bmatrix}$ então $A = B$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 2x-1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ y+2 & 1 \end{bmatrix}$, calcule os valores reais de *x* e *y*, para que $A = B$.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2x-1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ y+2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 7 \Rightarrow x = 4 \\ y + 2 = 8 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3. Calcule os valores reais de x e y na igualdade:

$$\begin{bmatrix} x+y & 5 \\ 9 & 2x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} x+3y & 7 & -1 \\ 11 & 3x+5y & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ z & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

determine os valores reais de x, y e z, sendo $A = B$.

5. Operações com matrizes

5.1 Adição

Somamos os elementos correspondentes das matrizes, por isso, é necessário que as matrizes sejam de mesma ordem. $A=[a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, portanto $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

então a matriz $C = A + B$ será:

$$C = \begin{bmatrix} 7+2 & -2+1 & 1+4 \\ 0+8 & +4+0 & -3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

5.2 Multiplicação por um número real

Sendo $k \in \mathbb{R}$ e A uma matriz de ordem mxn, a matriz $k \cdot A$ é obtida multiplicando-se todos os elementos de A por k.

Exemplo: Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, a matriz $5A = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}$

5.3 Subtração

A diferença entre duas matrizes A e B (de mesma ordem) é obtida por meio da soma da matriz A com a oposta de B. Assim:

Sendo $A = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e a oposta de B,

$$-B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} = A - B = \begin{bmatrix} -9+2 & 1+7 \\ 3-5 & -5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$$

5.4 Multiplicação entre matrizes

Consideremos o produto $A \cdot B = C$. Para efetuarmos a multiplicação entre A e B, é necessário, antes de mais nada, determinar se a multiplicação é possível, isto é, se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, determinando a ordem de C: $A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$, como o número de colunas de A coincide com o de linhas de B(n) então torna-se possível o produto, e a matriz C terá o número de linhas de A(m) e o número de colunas de B(p).

Sejam A e B matrizes de ordem 2, neste caso o produto $A \cdot B$ e uma matriz C também de ordem 2.

Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ definimos

$C_{2 \times 2} = A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2}$, ou seja,

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Os elementos de C são obtidos multiplicando-se *ordenadamente* os elementos da linha de A pelos elementos da coluna de B e, em seguida, adicionando-se esses produtos.

c_{11} é obtido somando-se os produtos dos elementos da linha 1 de A pela coluna 1 de B.

$$c_{11} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 6 = -10$$

c_{12} é obtido somando-se os produtos dos elementos da linha 1 de A pela coluna 2 de B.

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 = -5$$

c_{21} é obtido somando-se os produtos dos elementos da linha 2 de A pela coluna 1 de B.

$$c_{21} = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 26$$

c_{22} é obtido somando-se os produtos dos elementos da linha 2 de A pela coluna 2 de B

$$c_{22} = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 13 \text{ portanto } C = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 26 & 13 \end{bmatrix}$$

De modo geral, podemos dizer que:

O produto de $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ por $B = [b_{ij}]_{p \times n}$, é a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, cujo elemento da linha *i* e coluna *j* é obtido multiplicando os elementos da linha *i* de A pelos correspondentes elementos da coluna *j* de B e, posteriormente, somando-se os produtos obtidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, calcule: $A + B - C$.

Resolução:

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 - 5 - \frac{1}{2} & 3 + 0 - 1 \\ 1 + 6 - 3 & 2 + 4 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Calcule $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot B$, dado $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Resolução:

Temos: $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot B = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

3. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$. Obter $X = A \cdot B$.

Resolução:

A matriz $X = A \cdot B$ será $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}_{2 \times 2} =$

$= X_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$ sendo portanto possível realizar o produto dessas duas matrizes.

Sendo L = linha de A, temos: $L_1 = 0$ e 3; $L_2 = 1$ e 4; $L_3 = 2$ e 5.

E sendo C = coluna de B, temos: $C_1 = 6$ e 8; $C_2 = 7$ e 9.

Temos, então os elementos da matriz X:

$$x_{11} = (L_1 \cdot C_1) = 0 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 24$$
$$x_{12} = (L_1 \cdot C_2) = 0 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 27$$
$$x_{21} = (L_2 \cdot C_1) = 1 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 38$$
$$x_{22} = (L_2 \cdot C_2) = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 9 = 43$$
$$x_{31} = (L_3 \cdot C_1) = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 8 = 52$$
$$x_{32} = (L_3 \cdot C_2) = 2 \cdot 7 + 5 \cdot 9 = 59$$

de onde $X = \begin{bmatrix} 24 & 27 \\ 38 & 43 \\ 52 & 59 \end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, calcule: a) $A + B - C$ e b) $A - B + C$

6. (Osec-SP) Os números x e y tais que:
$\begin{bmatrix} x^2 & y^3 \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x & -y \\ 4x & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ são:

a) $x = -4$ e $y = -1$ c) $x = -4$ e $y = 0$ e) $x = 1$ e $y = 0$

b) $x = -4$ e $y = 1$ d) $x = 1$ e $y = -1$

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$, calcule as matrizes X e Y no sistema abaixo: $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$

8. Determine o produto de A por B, sendo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Casos particulares

6.1 Matriz identidade ou unidade: é a matriz quadrada que possui os elementos de sua diagonal principal iguais a 1 e os demais elementos iguais a 0.

Indicamos a matriz identidade de I_n, onde n é a ordem da matriz. Exemplo:

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matriz identidade de ordem 2

6.2 Matriz transposta: é a matriz obtida pela troca ordenada de linhas por colunas de uma matriz. Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, obtém-se uma outra matriz de ordem $n \times m$, chamada de transposta de A. Indica-se por A^t.
Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ então } A^1 = [1\ 2\ 3]$$

6.3 Matriz inversa: dizemos que uma matriz quadrada A, de ordem *n*, admite inversa se existe uma matriz A^{-1}, tal que:

$$A_n \cdot A_n^{-1} = A_n \cdot A_n = I_n$$

Neste caso, dizemos que A^{-1} é a inversa de A. Exemplo:
Dada a matriz A, determinar A^{-1}.

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, chamemos de $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos $A \cdot A^{-1} = I_2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + 0c & 3b + 0d \\ 0a + 1c & 0b + 1d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, podemos escrever os sistemas:

$$\text{(I)} \begin{cases} 3a + 0c = 1 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{3} \\ 0a + 1c = 0 \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} 3b + 0d = 0 \Rightarrow 3b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 0b + 1d = 1 \Rightarrow 1d = 1 \Rightarrow d = 1 \end{cases}$$

Logo: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Quando uma matriz quadrada não admite inversa, dizemos que é uma *matriz singular*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9. (UFSC) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e seja $P = (2A - C) \cdot B$. Determine a soma dos elementos da diagonal principal da matriz P.

10. (UFSC) Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Seja $M = (A + B^t) \cdot (A^t - B)$, onde A^t e B^t são as matrizes transpostas de A e B respectivamente. Qual o produto dos elementos m_{ij} com $i = j$ da matriz M?

11. (UFSC) Sendo $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ com $a_{ij} = i^2 - j$, $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ com $b_{ij} = i + j$ e $C = A \times B$, determine a soma dos elementos da 3ª linha da matriz C.

12. (UFPA) Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, onde $a_{ij} = \left[\frac{2i - 3j}{i}\right]$, e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, para que se tenha $B^2 + X = 2A$, a matriz X deverá ser igual a:

a) $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$

7. Determinantes

7.1. Definição

Determinante é um número real associado a uma matriz quadrada.

Para indicar o determinante, usamos barras. Seja A uma matriz quadrada de ordem *n*, indicamos o determinante de A por:

$$\det A \text{ ou } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7.2. Determinante de uma matriz de 1ª ordem

A matriz de ordem 1 só possui um elemento. Por isso, o determinante de uma matriz de 1ª ordem é o próprio elemento. Exemplo: Se $A = [2]$, então $\det A = |2| = 2$.

7.3. Determinante de uma matriz de 2ª ordem

Em uma matriz de 2ª ordem, obtém-se o determinante por meio da diferença do produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária. Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule o determinante das matrizes quadradas de 2ª ordem:

a) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

Resolução:

a) $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 18 - 10 = 8$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - (-4) \cdot 3 = 9 + 12 = 21$

2. Determine o valor de x nas equações:

a) $\begin{bmatrix} x & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 4$ b) $\begin{bmatrix} x-2 & 3 \\ 4 & x+2 \end{bmatrix} = 0$

Resolução:

a) Temos:

$3 \cdot x - (-2) \cdot 5 = 4 \Rightarrow 3x + 10 = 4 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$

Logo: $S = \{-2\}$

b) Temos:

$(x - 2) \cdot (x + 2) - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow$

$x = \pm 4$

Logo: $S = \{\pm 4\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13. Calcule o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 43 & 19 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{7} & 10 \\ -2 & 1+\sqrt{7} \end{vmatrix}$ c) $\left|\sqrt{2}\right|$

14. Calcule o valor de x nas equações:

a) $|x| = -3$ b) $|5| = x - 2$ c) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

15. (UFRN) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, o determinante do produto de A pela sua transposta vale:

a) 56 b) 38 c) 42 d) 78 e) 30

7.4. Regra de Sarrus

Esta técnica é utilizada para obtermos o determinante de matrizes de 3ª ordem.

Utilizaremos um exemplo para mostrar como aplicar a regra de Sarrus. Consideremos a matriz da 3ª ordem:

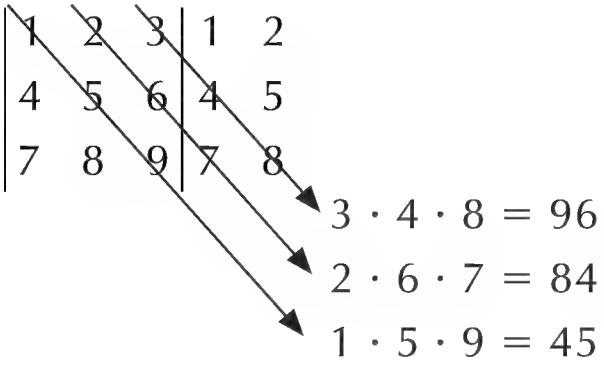
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

A regra de Sarrus consiste em:

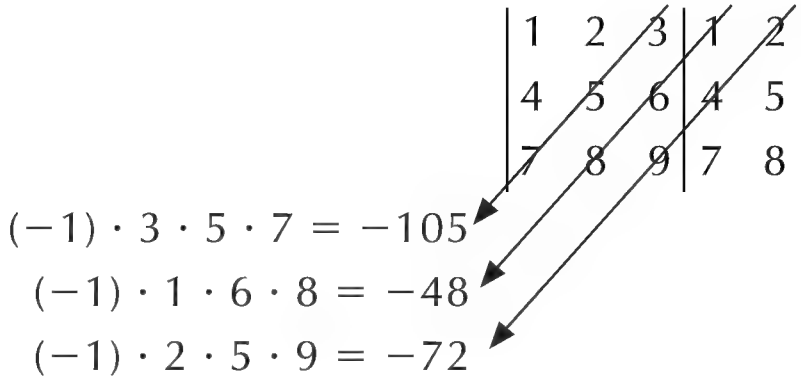
a) Repetir as duas primeiras colunas à direita do determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

b) Multiplicar os elementos da diagonal principal e os elementos que estiverem nas duas paralelas a essa diagonal, conservando os sinais desses produtos.



c) Efetuar o produto dos elementos da diagonal secundária e dos elementos que estiverem nas duas paralelas à diagonal e multiplicá-los por −1.



d) Somar os resultados dos itens b e c.

$\det A = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0$

Portanto, $\det A = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache o determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Resolução:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 2 + 12 + 2 - 8 - 3 - 2 = 3$$

2. Calcule o valor de *x* na equação: $\begin{vmatrix} -2x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

Resolução:

Aplicando a regra de Sarrus, temos:

$$\begin{vmatrix} -2x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2x & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = -1 - [(-3) \cdot (x-1)] - [(-2x) \cdot 4 \cdot 1] = 0$$

$$-1 + 3x - 3 + 8x = 0$$

$$11x - 4 = 0 \Rightarrow 11x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{11}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. Calcule os determinantes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

17. (Mackenzie-SP) A solução da equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & 5 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0$ é:

a) 1 b) 58 c) -58 d) $\frac{67}{9}$ e) 2

7.5. Teorema de Laplace

Para matrizes quadradas de ordem $n \geqslant 2$, o teorema de Laplace oferece uma solução prática no cálculo dos determinantes.

Pelo teorema, o determinante de uma matriz quadrada A de ordem *n* ($n \geqslant 2$) é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou de uma coluna qualquer, pelos respectivos co-fatores. Exemplo:

Dada a matriz quadrada de ordem 3, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, vamos calcular det A usando o teorema de Laplace.

Podemos calcular o determinante da matriz A, escolhendo qualquer linha ou coluna. Por exemplo, escolhendo a 1ª linha, teremos:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{11} = 1 \cdot (-21) \Rightarrow A_{11} = -21$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{12} = (-1) \cdot (-6) \Rightarrow A_{12} = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{13} = 1 \cdot (-12) \Rightarrow A_{13} = -12$$

Portanto, temos que:

$$\det A = 3 \cdot (-21) + 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-12) \Rightarrow \det A = -63 + 12 - 12$$

$$\det A = -63$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule o determinante, por Laplace, dada $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Resolução:

Neste exercício, convém escolher a 1ª coluna, pois há maior quantidade de "zeros".

$$\det B = b_{11} \cdot B_{11} + b_{21} \cdot B_{21} + b_{31} \cdot B_{31}$$

$$\det B = 0 \cdot B_{11} + 0 \cdot B_{21} + (-2) \cdot B_{31} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B = 0 + 0 - 2 \cdot B_{31} \Rightarrow \det B = -2 \cdot B_{31}, \text{ então:}$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow B_{31} = -13 \Rightarrow$$

$$\det B = -2 \cdot (-13) \Rightarrow \det B = 26$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

18. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, calcule o determinante, aplicando Laplace.

7.6. Determinante de uma matriz de ordem n > 3

Para obtermos o determinante de matrizes de ordem $n > 3$, utilizamos o teorema de Laplace e a regra de Sarrus.

Observe o exemplo a seguir.

Vamos calcular o determinante da matriz de 4ª ordem:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

Escolhendo a 1ª linha para o desenvolvimento do teorema de Laplace. Temos então:

$$\det A = a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + a_{13}\,A_{13} + a_{14}\,A_{14}$$

$$\det A = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & -4 & -6 \end{bmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & -6 \end{bmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -6 \end{bmatrix} +$$

$$+ (-2) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & -4 & -6 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & -6 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Como os determinantes são, agora, de 3ª ordem, podemos aplicar a regra de Sarrus em cada um deles. Assim:

$$\det A = 3 \cdot (188) - 1 \cdot (121) + 2 \cdot (61)$$

$$\det A = 564 - 121 + 122 \Rightarrow \det A = 565$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Dada $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, calcule det B.

Resolução:

Vamos desenvolver o determinante em relação à 2ª linha, já que essa linha tem maior quantidade de "zeros":

$\det B = b_{21} \cdot B_{21} + b_{22} \cdot B_{22} + b_{23} \cdot B_{23} + b_{24} \cdot B_{24}$

$\det B = b_{21} \cdot B_{21} + 0 + 0 + 0$

$\det B = b_{21} \cdot B_{21}$

$$\det B = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = (-2) \cdot (-6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B = 12$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

19. (FGV-SP) Seja a raiz da equação: $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 16$, então o valor de x^2, é:

a) 16 b) 4 c) 0 d) 1 e) 64

20. Calcule o determinante, desenvolvendo por Laplace.

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

7.7. Propriedades dos determinantes

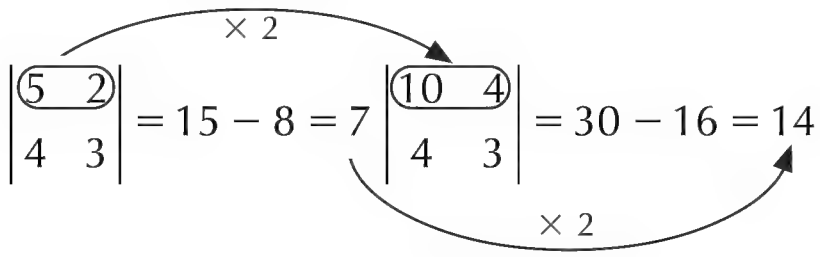
a) Se todos os elementos de uma linha ou de uma coluna são nulos, o determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

b) Se uma matriz A possui duas linhas ou duas colunas iguais, então o determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

c) Em uma matriz cuja linha ou coluna foi multiplicada por um número k real, o determinante também fica multiplicado pelo mesmo número k.



Então: $\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

d) Para duas matrizes quadradas de mesma ordem, vale a seguinte propriedade:

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

e) Uma matriz quadrada A será *inversível* se, e somente se, seu determinante for diferente de zero.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

21. (UE de Feira de Santana-BA) Seja x o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$ então $\sqrt{x}$ é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

22. (Mackenzie-SP) Dadas $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} a & 5 & 1 \\ b & 3 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix}$, tem-se:

a) $\det A = 2 \det B$

b) $\det A = \det B^t$

c) $\det A^t = \det B$

d) $\det B = 2 \det A$

e) $\det A = \det B$

23. A matriz $A = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$ é tal que $\det (A^4) = \frac{2}{x}$.
O valor de *x* é:

a) $\frac{1}{32}$ c) $\frac{1}{5}$ e) 32

b) $\frac{1}{2}$ d) 5

24. Calcule o determinante e explique a sua resposta:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

25. (UFPB) Se $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ e $f(x) = -x^2 + 3x + 2$, então $f(\det A)$ é igual a:

a) 12 c) 10 e) −8

b) −4 d) 0

26. (UFRGS-RS) Na equação seguinte:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

um valor possível para *x* é:

a) 0 c) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{3}$

Capítulo 9

Sistemas Lineares

Dominando os conceitos de matrizes e de determinantes, podemos aplicar esse conhecimento para classificar e resolver os sistemas lineares.

Um sistema linear pode ser formado para resolver várias questões, mesmo as mais cotidianas.

Veja o exemplo a seguir.

Num estacionamento, há carros e motocicletas, num total de 70 veículos. A soma das rodas desses veículos é 180. Quantos são os carros e quantas são as motocicletas?

A partir do enunciado, podemos escrever um sistema linear.

Assim, designando por x as motocicletas e por y os carros, obtemos a seguinte equação:

(I) $x + y = 70$

Como as motocicletas têm 2 rodas e os carros têm 4, podemos escrever a equação:

(II) $2x + 4y = 180$

As equações (I) e (II) formam o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 2x + 4y = 180 \end{cases}$$

A solução desse sistema irá nos fornecer o número de automóveis e de motocicletas no estacionamento.

1. Definição

Entendemos por *sistema linear* um conjunto de equações lineares reunidas com o objetivo de se obterem soluções comuns a todas essas equações.

2. Equação linear

Chamamos de *equações lineares* as equações do 1º grau que apresentam a forma:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, onde:

$a_1, a_2, ..., a_n$ são *coeficientes*;

$x_1, x_2, ..., x_n$ são *incógnitas*, ou variáveis;

b é o *termo independente* da equação.

Exemplo:

$$x + 3y = 4 \begin{cases} 1 \text{ e } 3 \text{ são coeficientes das incógnitas} \\ x \text{ e } y, \text{ respectivamente;} \\ 4 \text{ é termo independente.} \end{cases}$$

Quando uma equação linear apresenta o termo independente igual a zero, dizemos que se trata de uma *equação linear homogênea*. Exemplo:

$$2x + y - z = 0$$

3. Solução de uma equação linear

Dada uma equação linear com *n* incógnitas:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$,

temos que sua solução é a seqüência de números reais $(k_1, k_2, ..., k_n)$ que, colocados correspondentemente no lugar de $x_1, x_2, ..., x_n$, tornam verdadeira a igualdade.

Quando a equação linear for *homogênea*, então ela admitirá pelo menos a solução (0, 0, ..., 0), chamada de *solução trivial*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Decida se são ou não lineares as equações:

   a) $x + 7y = 13$

   b) $5x_1 + \frac{3}{7}x_2 = 2$

   c) $2x + \frac{5}{y} - z = 8$

   d) $\sqrt{x} + y + z = 6$

Resolução:

a) É uma equação linear.

b) É uma equação linear.

c) Não é uma equação linear, pois $\frac{5}{y} = 5 \cdot \frac{1}{y} = 5 \cdot y^{-1} \neq y$.

d) Não é uma equação linear, pois $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \neq x$.

2. Verifique quais das equações abaixo são equações lineares homogêneas:

   a) $4x - y + 3 = 0$

   b) $3x_1 - 7x_2 = 5x_3$

   c) $x - 3y + z = \frac{0}{4}$

Resolução:

a) Não é uma equação linear homogênea, pois $4x - y + 3 = 0 \Rightarrow 4x - y = -3 \neq 0$.

b) É uma equação linear homogênea, pois $3x_1 - 7x_2 = 5x_3 \Rightarrow 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 0$.

c) É uma equação linear homogênea, pois $x - 3y + z = \frac{0}{4} \Rightarrow x - 3y + z = 0$.

3. Determine k na equação $5x + 2y = 12$, para que o par ordenado $(k, -4)$ seja solução da equação.

Resolução:

Sendo $(k, -4)$ uma solução de $5x + 2y = 12$, então:

$$x = k \text{ e } y = -4$$

Substituindo esses valores na equação, temos:

$$5k + 2 \cdot (-4) = 12 \Rightarrow 5k - 8 = 12 \Rightarrow k = \frac{20}{5} \Rightarrow k = 4$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Assinale quais dos pares ordenados abaixo satisfazem a equação $2x + y = 7$

   a) (1, 3) b) (2, 3) c) (3, 2)

   d) (3, 1) e) (4, −1) f) (−1, 4)

2. Calcule o valor de k na equação $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 2$, para que $(k + 2, k)$ satisfaça a igualdade.

3. Decida se são ou não lineares as equações:

   a) $2x + 3y + z = \sqrt{49}$ c) $6x + \sqrt[3]{8}\ y - z = 0$

   b) $\sqrt{x} - 2y = 9$ d) $x^2 - 6y + 3z = 12$

4. Assinale a(s) alternativa(s) que representa(m) uma equação(ões) linear(es) homogênea(s):

   a) $5x - 3y + 2z + 7 = 7$ c) $13x_1 - 7x_2 = 0$

   b) $3x_1 + 2x_2 - 5 = 0$ d) $\sqrt{x}_1 + 2x_2 = 0$

4. Representação genérica de um sistema linear

Um sistema linear de m equações nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

onde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ são números reais.

Se o conjunto de números reais $(k_1, k_2, ..., k_n)$ torna verdadeiras todas as equações do sistema, dizemos que esse conjunto é *solução* do sistema linear.

Como as equações lineares são homogêneas quando $b = 0$, então, conseqüentemente, um sistema linear será homogêneo quando $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$.

Assim, o sistema admitirá a solução trivial, (0, 0, ... 0).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. Dado o sistema $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

verifique se as ternas (1, 0, 1) e (0, −3, 1) são soluções do sistema.

6. Calcule *k* para que o sistema a seguir seja homogêneo.

$\begin{cases} -3x + 2y = k^2 - 25 \\ 2x - y = k + 5 \end{cases}$

5. Representação de um sistema linear por meio de matrizes

Um sistema linear de *m* equações com *n* incógnitas pode ser escrito sob a forma de matrizes, bastando separar seus componentes por matriz.

Sejam:

$A_{mn} \Rightarrow$ a matriz dos coeficientes das incógnitas;

$X_{n1} \Rightarrow$ a matriz das incógnitas;

$B_{n1} \Rightarrow$ a matriz dos termos independentes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Portanto, podemos escrever o sistema sob a forma matricial:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dado o sistema $S_1 \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ -x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$

determine a equação matricial.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

É claro que, se efetuarmos $A \cdot X = B$, teremos novamente o sistema S_1.

2. Determine o sistema de equações lineares, dada a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{cases} 5x + 5y + 0z = 0 \\ x + 0y - 2z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Escreva as equações matriciais:

a) $\begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ -2x + 2z = 6 \\ x + 5y - 3z = 7 \end{cases}$

8. Escreva o sistema, sendo:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

9. (UFSC) Dada a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & x \\ -1 & 3 & 0 \\ y & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ -2 \\ 3y \end{bmatrix}$$

o valor da expressão $5x + 4y + z$ é:

6. Sistema normal

É o sistema em que o número de equações é igual ao número de incógnitas ($m = n$) e o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Exemplo:

Dado o sistema S: $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$, temos

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23 \neq 0$$

Logo, o sistema linear S é *normal*.

7. Regra de Cramer

Para a resolução de sistemas normais, utilizaremos a regra de Cramer, que será desenvolvida por meio do exemplo que segue:

Vamos determinar os valores reais de x e de y no sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = -4 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$$

a) Determinamos a matriz A dos coeficientes: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) Determinamos a matriz A_x, que se obtém pela substituição, em A, da coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes: $A_x = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

c) Determinamos a matriz A_y, que é obtida substituindo-se, em A, a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes: $A_y = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

d) Calculamos os valores de x e y:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} \text{ e } y = \frac{\det A_y}{\det A}$$

e) Calculamos det A, det A_x e det A_y e obtemos os valores de x e y:

$\det A = 15 - 2 = 13$

$\det A_x = -20 - 6 = -26 \Rightarrow x = -\frac{26}{13} \Rightarrow x = -2$

$\det A_y = 18 + 8 = 26 \Rightarrow y = \frac{26}{13} \Rightarrow y = 2$

Logo: $(-2, 2)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. (UFRGS-RS) A terna (a, b, c) é solução do sistema $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2z = 5 \\ 3y - \ \ = 7 \end{cases}$

O produto a · b · c é igual a:

a) 12 b) −3 c) 6 d) 50 e) −132

11. (Ufes) O valor da expressão x + y + z, onde *x*, *y* e *z* satisfazem o sistema abaixo é:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ 2x + y + z = 6 \\ -2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

12. Resolva o sistema pela regra de Cramer: $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

8. Classificação de um sistema linear

Classificar um sistema linear é considerá-lo em relação ao número de soluções que ele apresenta. Assim, os sistemas lineares podem ser:

a) *Sistema impossível* ou *incompatível*: quando não admite solução.

O sistema não admite solução quando o det A for nulo, e pelo menos *um* dos determinantes relativos às incógnitas for diferente de zero, isto é: det $A_1 \neq 0$ ou det $A_2 \neq 0$ ou ... ou det $A_n \neq 0$.

b) *Sistema possível* ou *compatível*: quando admite pelo menos uma solução. Este sistema pode ser:

- *Determinado*: quando admitir uma única solução.

O sistema é determinado quando det A ≠ 0.

- *Indeterminado*: quando admitir infinitas soluções.

  O sistema é indeterminado quando $\det A = 0$ e os determinantes relativos a todas às incógnitas forem também nulos, isto é: $\det A_1 = \det A_2 = \ldots = \det A_n = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Classifique o sistema: $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

Resolução:

Temos: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 5 \Rightarrow \det A \neq 0.$

Logo, o sistema é possível e determinado. Terá apenas uma solução.

2. Discuta o sistema: $\begin{matrix} 2x + y = 4 \\ 6x + 3y = 12 \end{matrix}$

Resolução:

Temos: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 0$

$$\det A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot 3 - 12 \cdot 1 = 0$$

$$\det A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = 2 \cdot 12 - 4 \cdot 6 = 0$$

Portanto, o sistema é possível e indeterminado. Terá infinitas soluções, isto é, uma infinidade de pares ordenados satisfazem o sistema dado.

3. Discuta o sistema: $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 3x - 9y = 5 \end{cases}$

Resolução:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 5 = 7 \neq 0 \Rightarrow x = \det A_1 = \frac{7}{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ impossível.

Logo, o sistema é impossível.

4. (Fuvest-SP) O sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ ax + by = c \end{cases}$

tem solução se e somente se:

a) $a \neq c$ c) $a = c$ e) $b = 1$ e $a - c = 1$

b) $b = c$ d) $a = b$ e $c = 1$

Resolução:

Temos um sistema com 3 equações e 2 incógnitas (x e y), $S_{3 \times 2}$, ou seja, um sistema não normal. Vamos resolvê-lo pelo método da adição:

$$\begin{cases} x + \cancel{y} = 1 \\ x - \cancel{y} = 1 \\ \hline 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Substituindo o valor de $x = 1$ na equação $x + y = 1$, temos:

$1 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 1 \Rightarrow y = 0$

Substituindo os valores de x e de y na equação $ax + by = c$, temos: $a \cdot 1 + b \cdot 0 = c \Rightarrow a + 0 = c \Rightarrow a = c$

Alternativa correta: c

Aplicação Prática

Balanceamento de equações químicas

Em Química, é possível realizar o balanceamento de equações utilizando-se o método algébrico.

Vamos então utilizá-lo para balancear a equação de obtenção do azul-da-prússia, um composto químico:

$$FeC\ell_3 + Na_4[Fe(CN)_6] \rightarrow Fe_4[Fe(CN)_6]_3 + NaC\ell$$

cloreto férrico	ferrocianeto de sódio	azul-da-prússia	cloreto de sódio

Pela lei de Lavoisier, o número de átomos de um mesmo elemento deve ser o mesmo em ambos os membros da reação.

Chamamos de x, y, w e z os coeficientes.

$$x\ Fe\ C\ell_3 + y\ Na_4[Fe(CN)_6] \rightarrow w\ Fe_4[Fe(CN)_6]_3 + z\ Na\ C\ell$$

Os números dos átomos de ferro, cloro, sódio, carbono e nitrogênio no primeiro membro são: $x + y$, $3x$, $4y$, $6y$, $6y$.

Os números dos átomos de ferro, carbono, nitrogênio, sódio e cloro no segundo membro são: $7w$, $18w$, $18w$, z, z.

Igualando os valores do primeiro e segundo membros, teremos um sistema de cinco equações e quatro incógnitas.

$$\begin{array}{ll} Fe: x + y = 7w & \\ C\ell: 3x = z & \\ Na: 4y = z & \Rightarrow \\ C: 6y = 18w & \\ N: 6y = 18w & \end{array} \quad \begin{cases} x + y - 7w = 0 \\ 3x - z = 0 \\ 4y - z = 0 \\ 6y - 18w = 0 \\ 6y - 18w = 0 \end{cases}$$

O sistema resultante é homogêneo.

Portanto, (0, 0, 0, 0) é solução desse sistema, mas não nos interessa aqui.

Por admitir a solução trivial, todo sistema linear homogêneo é possível, podendo ser determinado ou indeterminado.

Para fazer essa verificação, vamos calcular o determinante da matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & -18 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1) \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -18 \end{bmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (+42 - 18) + (-1) \cdot (-72) = -72 + 72 = 0$$

Como o determinante da matriz é igual a zero, o sistema é possível e indeterminado. Isso quer dizer que ele pode aceitar outras soluções além da trivial.

Portanto se atribuirmos a y o valor 1 teremos

$$\begin{cases} x + 1 - 7w = 0 \\ 3x - z = 0 \\ 4 - z = 0 \\ 6 - 18w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 7w = -1 \\ 3x - z = 0 \\ z = 4 \\ w = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Portanto, $z = 4$, $w = \frac{1}{3}$, $x = \frac{4}{3}$.

Como aqui nos interessa índices inteiros, vamos multiplicar os valores por 3. Assim teremos na reação:

$$4FeC\ell_3 + 3Na_4[Fe(CN)_6] \rightarrow Fe_4[Fe(CN)_6]_3 + 12\ NaC\ell$$

a qual contém em ambos os membros o mesmo número de átomos de cada elemento.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

13. (UFSC) Determine o valor de *m* para que o sistema abaixo admita infinitas soluções:

$$\begin{cases} mx - 2y - z = 0 \\ x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

14. (UFMG) Se (x, y) = (1, 2) é a solução do sistema

$$\begin{cases} ax + by = 11 \\ bx - ay = 3 \end{cases}$$

então os valores de *a* e *b* são:

a) $a = -\frac{19}{5}$ e $b = \frac{17}{5}$

b) $a = -\frac{1}{3}$ e $b = \frac{8}{3}$

c) $a = 1$ e $b = 5$

d) $a = \frac{17}{3}$ e $b = \frac{8}{3}$

e) $a = \frac{19}{5}$ e $b = \frac{17}{5}$

15. (Ufac) A condição sobre *a*, *b*, *c* e *d* para que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

admita uma, e somente uma, solução é que:

a) $ad - bc = 0$
b) $ad + bc = 0$
c) $ad + bc$ seja diferente de zero
d) $ad - bc$ seja diferente de zero
e) $ab - cd = 0$

16. (UFPB) Determinar o valor de *k* para que o sistema linear abaixo não tenha solução:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + y + 6z = 1 \\ 5x + 2y + kz = 0 \end{cases}$$

17. (FGV-SP) O sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ x - 14z = 0 \end{cases}$$ é:

a) determinado.
b) impossível.
c) determinado e admite como solução (1, 1, 1).
d) indeterminado.
e) n. d. a.

18. (Fuvest-SP) O sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + mz = 0 \end{cases}$$

é indeterminado para:

a) todo *m* real
b) nenhum *m* real
c) $m = 1$
d) $m = -1$
e) $m = 0$

19. (UFPB) Sendo (a, b, c) a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - z = 2 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

qual o valor de $a^2 + b^2 + c^2$?

Capítulo 10

Análise Combinatória e Binômio de Newton

Análise Combinatória

Análise combinatória é a parte da Matemática que estuda os processos de contagem. Ela surgiu da necessidade de se calcular o número de possibilidades que podem ocorrer em uma certa experiência, sem precisar descrever cada uma dessas possibilidades.

O estudo da análise combinatória começou no século XVI com o matemático italiano Niccolo Fontana (1500-1557), também conhecido por Tartaglia (que significa gago). A este, seguiram-se os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

A análise combinatória é também o suporte da Teoria das Probabilidades, apoiando-se no Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo.

1. Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

Esse método consiste em multiplicar o número de possibilidades de cada etapa da experiência. Para entendermos melhor, observemos atentamente os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Um teatro tem 5 portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair do teatro?

Resolução:

Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos:

k_1: existem 5 possibilidades para entrar no teatro;

k_2: existem 5 possibilidades para sair do teatro.

$$k_1 \cdot k_2 = 5 \cdot 5 = 25$$

Logo, existem 25 possibilidades para entrar e sair do teatro.

2. Nélson tem 3 camisas, 5 calças, 2 gravatas, 4 pares de sapatos e 1 paletó. De quantas maneiras diferentes ele poderá se vestir usando uma peça de cada conjunto?

Resolução:

$k_1 = 3$ camisas; $k_2 = 5$ calças; $k_3 = 2$ gravatas;

$k_4 = 4$ pares de sapatos; $k_5 = 1$ paletó

Então, $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 =$

120 maneiras diferentes

3. Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução:

k_1: é a etapa para escolher a centena $\Rightarrow k_1 = 9$;

k_2: é a etapa para escolher a dezena $\Rightarrow k_2 = 9$;

k_3: é a etapa para escolher a unidade $\Rightarrow k_3 = 9$.

Logo, temos: $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 =$ 729 números

4. No problema anterior, quantos serão os números, se os 3 algarismos forem distintos (isto é, se não for permitida a repetição dos algarismos)?

Resolução:

$k_1 = 9$ (centena)

$k_2 = 8$ (dezena)

Nesta etapa, eliminou-se um algarismo que foi utilizado em k_1.

$k_3 = 7$ (unidade)

Nesta etapa, eliminou-se um algarismo que foi utilizado em k_2.

Portanto, temos: $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 =$ 504 números

5. Quantas placas de veículos podem ser criadas, se forem usadas 2 letras de um alfabeto de 26 letras, seguidas por 4 algarismos?

Resolução:

Para formarmos uma placa de 2 letras e 4 algarismos, passamos por 6 etapas:

k_1: escolher a 1ª letra;

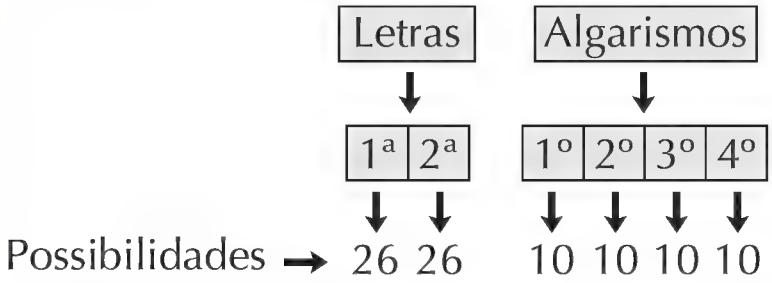
k_2: escolher a 2ª letra;

k_3: escolher o 1º algarismo;

k_4: escolher o 2º algarismo;

k_5: escolher o 3º algarismo;

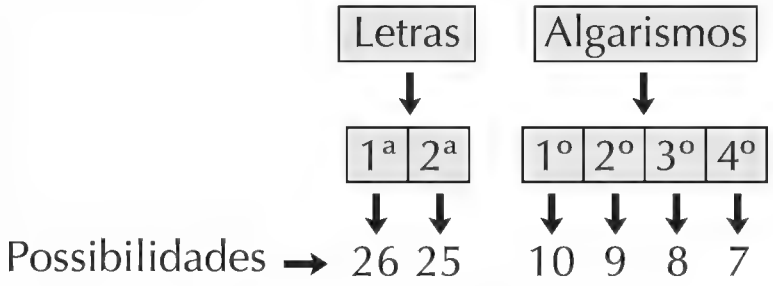
k_6: escolher o 4º algarismo.



Então, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos: $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5 \cdot k_6 = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$

6.760.000 possibilidades

Vamos supor que, neste mesmo problema, não seja permitida a repetição de letras nem de algarismos. Neste caso, teremos:

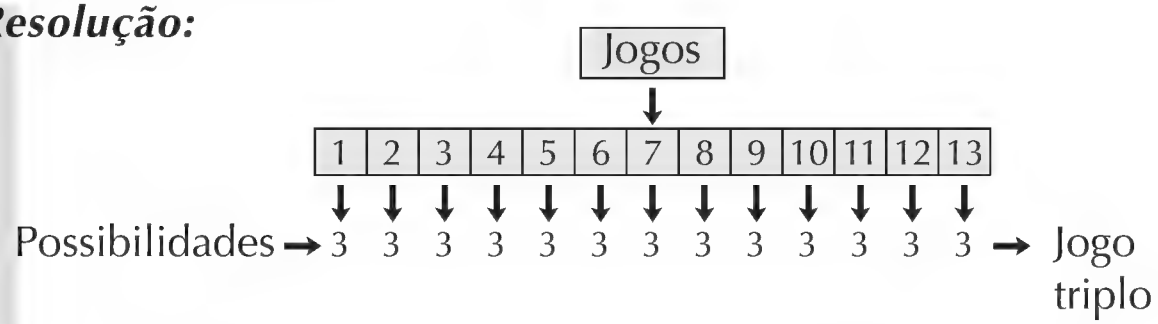


Logo, $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5 \cdot k_6 = 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 =$

3.276.000 possibilidades

6. Quantos são os prognósticos possíveis em uma aposta de Loteria Esportiva (com 13 jogos)?

Resolução:



Portanto, temos: $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_{13} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 =$

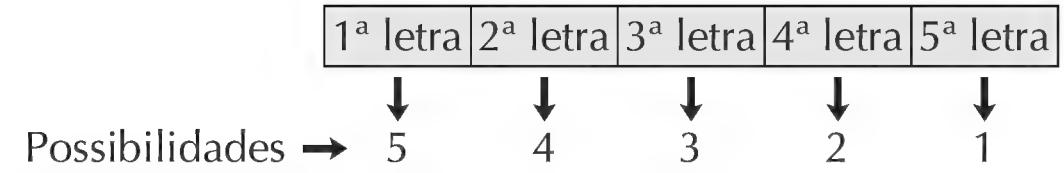
$= 3^{13} = 1.594.323$ possibilidades

(Claro que, se você quiser jogar com a certeza de ganhar, basta multiplicar o resultado pelo preço de uma aposta e terá a quantia que deverá ser gasta para isso!)

7. Quantos anagramas podemos formar com o nome PEDRO?

Resolução:

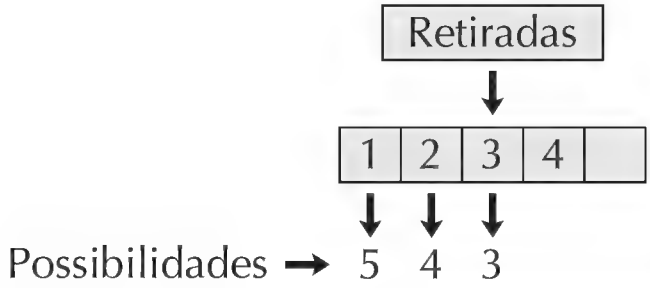
Vamos aplicar o Princípio Fundamental da Contagem para o cálculo dos anagramas. Temos 5 letras distintas: fixando-se uma letra como sendo a primeira do anagrama, restam 4 possibilidades para a 2ª letra. Fixando-se 2 letras, restam 3 possibilidades para a 3ª letra, e assim sucessivamente.



Então: $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ 120 anagramas

8. Em uma urna, há 5 bolas de cores diferentes. De quantas maneiras podemos retirar 3 bolas, uma de cada vez, sem recolocá-las na urna?

Resolução:



Então: $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 =$ 60 possibilidades

E se as pusermos de volta?

Cada bola pode ser retirada de 5 maneiras. Logo:

$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 =$ 125 possibilidades

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Quantos números de 3 algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9? E se não forem distintos?
2. Uma fábrica tem 5 modelos de carros e utiliza 8 cores. Quantas opções de compra tem o consumidor?
3. Nina tem 6 saias, 4 blusas, 3 pares de sapatos e 2 casacos. De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir, usando uma peça de cada conjunto?
4. Uma escola tem 6 portas. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar e sair da escola?
5. Quantos números de telefone podem existir com o prefixo 279?

6. Quantos anagramas podemos formar com o nome MÍLTON?
7. Calcule quantos números de 2 algarismos podem ser formados no sistema decimal:
   a) sem repetir algarismos; b) repetindo-se algarismos.
8. Quantas placas de automóveis podem ser formadas, usando-se 2 letras de um alfabeto de 26 letras, seguidas por 2 algarismos e podendo ter as cores amarela ou preta? Quantas serão as placas se não for permitida a repetição de letras nem de algarismos?
9. De quantas maneiras distintas um sindicato de 26 membros pode eleger um presidente, um tesoureiro e um secretário, se nenhuma pessoa pode ser eleita para mais de um cargo?
10. Um baralho tem 52 cartas. Retirando-se duas cartas, uma de cada vez, sem recolocá-las no baralho, quantas possibilidades existem?
11. (UFSC) Dispomos de cimento, 3 tipos de areia e 4 tipos de brita. Determine a quantidade de tipos diferentes de concreto que poderiam ser feitos, aparecendo os 3 elementos na sua composição.

2. Fatorial

Como pudemos observar, é comum aparecerem produtos de fatores naturais sucessivos em problemas de análise combinatória, tais como: $3 \cdot 2 \cdot 1$ ou $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, por isso surgiu a necessidade de simplificarmos este tipo de notação, facilitando os cálculos combinatórios. Assim, produtos em que os fatores chegam sucessivamente até a unidade são chamados *fatoriais* e são indicados por uma exclamação, !, logo após o número. Exemplos:

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ (lê-se *três fatorial* ou *fatorial de três*)

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ (lê-se *cinco fatorial* ou *fatorial de cinco*)

Sendo $n \in \mathbb{N}$, podemos generalizar:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ se } n > 0$$

E, por convenção, temos:

$$\text{Se } n = 0, \text{ então } 0! = 1$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. De quantas maneiras podemos organizar 7 alunos em uma fila?

Resolução:

$$1º\ 2º\ 3º\ \ldots\ 7º$$
$$7º\ 6º\ 5º\ \ldots\ 1º$$

Logo, o número de possibilidades é igual ao produto de todos os números naturais de 7 até 1, isto é:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040 \text{ maneiras}$$

2. Simplifique as frações:

a) $\dfrac{9!}{7!}$ b) $\dfrac{7!}{4!3!}$ c) $\dfrac{3! + 2!}{(0! + 1!)^2}$

Resolução:

a) $\dfrac{9!}{7!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$

b) $\dfrac{7!}{4!3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

c) $\dfrac{3! + 2!}{(0! + 1!)^2} = \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1 + 2!}{(1 + 1)^2} = \dfrac{6 + 2}{(2)^2} = \dfrac{8}{4} = 2$

3. Simplifique:

a) $\dfrac{(n + 1)!}{(n - 1)!}$

b) $\dfrac{(n - 5)!}{(n - 4)!}$

c) $\dfrac{2n! - (2n + 1)!}{2n!} \Rightarrow \dfrac{2n! - [(2n + 1) \cdot (2n!)]}{2n!}$

Resolução:

a) Vamos desenvolver os fatores até onde nos interessa, para simplificar:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\cdot(n)\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)\cdot n = n^2 + n$$

b) Observe que: $(n-4)! =$

$= (n-4-1)\cdot(n-5-1)\ldots = (n-5)!\cdot(n-6)!\ldots$

Então: $\frac{(n-5)!}{(n-4)!} = \frac{(n-5)!}{(n-4)\cdot(n-5)!} = \frac{1}{(n-4)!}$

c) $\frac{2n! - (2n+1)!}{2n!} \Rightarrow \frac{2n! - [(2n+1)\cdot(2n)!]}{2n!}$

Colocando 2n! em evidência no numerador da fração, temos:

$$\frac{2n! - [1 - (2n+1)\cdot 1]}{2n!} \Rightarrow 1 - (2n+1) = 1 - 2n - 1 = -2n$$

4. Calcule o valor de *n*:

a) $n! = 24$ b) $(n-1)! = 120$

Resolução:

a) Como $24 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$, então: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \Rightarrow n = 4$

b) $(n-1)! = 120 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \Rightarrow (n-1)! = 5! \Rightarrow$

$(6-1)! = 5! \Rightarrow n = 6$

5. Resolva as equações:

a) $(n-2)! = 2\cdot(n-4)!$ b) $\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = 10$

Resolução:

a) $\frac{(n-2)!}{(n-4} = 2 \Rightarrow \frac{(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)!}{(n-4)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow (n-2)\cdot(n-3) = 2$

Efetuando o produto no primeiro membro da equação, vem:

$n^2 - 5n + 6 = 2 \Rightarrow$

$n^2 - 5n + 4 = 0 \Rightarrow$ equação do 2º grau $\Rightarrow$

$$\Rightarrow n = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow n = 4 \text{ ou } n = 1$$

Se $n = 1$, então:

$(1 - 2)! = 2 \cdot (1 - 4)! \Rightarrow (-1)! \neq 2 \cdot (-3)!$

Assim, $n = 1$ não satisfaz a equação. Portanto, $n = 4$

$$S = \{4\}$$

b) $$\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 10 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(2 \cdot 1) \cdot (n-2)!} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 10 \Rightarrow n^2 - n = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2} \Rightarrow n = \frac{1 \pm 9}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow n = 5$ ou $n = -4$, mas $n = -4 \notin \mathbb{N}$, portanto: $S = \{5\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12. Simplifique:

a) $\frac{7!}{5!}$ b) $\frac{10!7!}{5!9!}$ c) $\frac{15! - 13!}{13 \cdot 12!}$

13. Simplifique:

a) $\frac{(n-6)!}{(n-5)!}$ c) $\frac{n!}{(n-3)!}$

b) $\frac{x!}{x \cdot (x-2)!}$ d) $\frac{(n+2)! - (n-1)}{n!}$

14. Calcule o valor de *n*:

a) $n! = 6$

b) $n! = 720$

c) $(n + 1)! = 720$

d) $(n - 1)! = 5.040$

15. Resolva as equações:

a) $\frac{(x+1)!}{x!} = 5$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$

c) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 20$

d) $\frac{n! + (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{8}$

3. Tipos de agrupamento

Até agora, vimos agrupamentos *sem elementos repetidos*. Este tipo de agrupamento é denominado *simples*.

Basicamente, podemos observar dois tipos de agrupamentos, aqueles em que a ordem dos elementos:

a) *é* importante;

b) *não* é importante.

Os agrupamentos em que a ordem dos elementos *é importante* são chamados *arranjos* ou *permutações*. Diferenciamos esses dois tipos de agrupamentos mais adiante.

Quando a ordem dos elementos *não é importante* temos uma *combinação simples*.

4. Arranjos simples

Em um conjunto A com *n* elementos, são *arranjos simples* todos os grupos formados por p dos n elementos com $p \leqslant n$, diferindo entre si pela ordem ou natureza dos elementos.

Notação:

$A_{n, p}$
onde n: número total de elementos;
p: número de elementos em cada grupo.

Se partirmos do Princípio Fundamental da Contagem, teremos $A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots \cdot (n - p + 1)$, considerando um arranjo de *p* fatores.

Portanto, para determinarmos quantos arranjos simples poderão ser formados a partir de um conjunto de n elementos tomados p a p, utilizamos a fórmula:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule o valor de $A_{6,\,2}$

Resolução:

Temos $n = 6$ e $p = 2$. Substituindo esses valores na fórmula, temos:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n - p)!} \Rightarrow A_{6,\,2} = \frac{6!}{(6 - 2)!} \Rightarrow A_{6,2} = 30$$

2. Resolva as equações:

a) $A_{n,\,2} = 2$ b) $A_{x,\,2} = 9 \cdot A_{x,\,1}$

Resolução:

a) Temos: $A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n - p)!} \Rightarrow A_{n,\,2} = \frac{n!}{(n - 2)!}$

$$A_{n,\,2} = 2 \Rightarrow \frac{n!}{(n - 2)!} = 2 \Rightarrow \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \cancel{(n - 2)!}}{\cancel{(n - 2)!}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - n = 2 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow S = \{2\}$$

b) $A_{x,\,2} = 9 \cdot A_{x,\,1} \Rightarrow \frac{x!}{(x - 2)!} = 9 \cdot \frac{x!}{(x - 1)!} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x \cdot (x - 1) \cdot \cancel{(x - 2)!}}{\cancel{(x - 2)!}} = 9 \cdot \frac{(x) \cdot \cancel{(x - 1)!}}{\cancel{(x - 1)!}} \Rightarrow x^2 - x = 9x$$

$\Rightarrow x^2 - x - 9x = 0 \Rightarrow x^2 - 10x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overbrace{x \cdot \underbrace{(x - 10)}_{} = 0}^{} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{não satisfaz} \\ \quad \text{ou} \\ x = 10 \end{cases} \qquad S = \{10\}$$

3. Dez meninas apostam uma corrida. De quantos modos diferentes pode ser formado o grupo das 3 primeiras colocadas?

Resolução:

Observe que os grupos formados são arranjos simples, pois:

- os elementos de cada grupo são distintos;
- os grupos diferem pela ordem dos elementos ou pela natureza dos mesmos.

Assim, temos:

número total dos elementos: $n = 10$

número total dos elementos de cada grupo: $p = 3$

Substituindo esses valores na fórmula $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} \Rightarrow A_{10,3} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720$$

Logo, podemos ter 720 modos diferentes de formar tal grupo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. Calcule o valor de:
    a) $A_{10,3}$ b) $A_{3,2}$

17. Resolva a equação: $A_{x,2} = 4x + 6$

18. (Fuvest-SP) Calcule quantos números múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com 2, 3, 4, 6 e 9.

19. O professor escolhe 2 alunos dentre os 30 de uma sala de aula e oferece uma bola para um deles e um livro para o outro. O número total de maneiras de premiar 2 alunos desta classe é:
    a) 870 c) 650 e) 324 b) 435 d) 325

5. Permutações simples

A permutação é um *arranjo de ordem máxima*, ou seja, faz uso de todos os elementos do conjunto (p = n!). Desta forma, temos:

$$P_n = n!$$

Onde P_n é o número total de permutações simples de *n* elementos distintos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule o valor de n:

   $12 \cdot A_{5,2} = 2 \cdot P_n$

Resolução:

b) $A_{5,2} = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$

$12 \cdot 20 = 2 \cdot P_n \Rightarrow P_n = \dfrac{240}{2} \Rightarrow P_n = 120$

Portanto, $n = 5$ pois $5! = 120$

2. Quantos são os anagramas da palavra AMOR?

Resolução:

Como temos 4 letras distintas, então o arranjo é uma permutação simples, onde:

$n = 4 \Rightarrow P_n = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

24 anagramas

3. (Fuvest-SP) Em um programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis seqüências dessas músicas, serão necessários aproximadamente:

   a) 100 dias b) 10 anos c) 1 século
   d) 10 séculos e) 100 séculos

Resolução:

O número de dias necessários para esgotar todas as possíveis seqüências é:

$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$ dias $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 10.000 anos

Portanto, $10! \Rightarrow$ 10.000 anos, ou seja, aproximadamente 100 séculos.

Alternativa correta: e

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

20. Calcule o valor da expressão: $3 \cdot P_2 + 2 \cdot A_{10, 3}$

21. Calcule o número de anagramas possíveis:
    a) da palavra AMIGO;
    b) da palavra ESTUDAR, que comecem por vogal.

22. (Fuvest-SP) Quantos anagramas da palavra FUVEST começam e terminam por vogal?

6. Combinações simples

Denomina-se *combinação simples* todo subconjunto formado por *p* dos *n* elementos de um conjunto. Difere do arranjo porque, aqui, a ordem não é importante.

Para determinarmos a combinação simples de n elementos tomados p a p, utilizamos a fórmula:

$$C_{n, p} = \frac{n!}{p!(n - p)!}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule:

a) $C_{8, 2}$

b) $\dfrac{C_{7, 3} + C_{6, 4}}{C_{5, 2}}$

Resolução:

a) Temos: n = 8 e p = 2

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \Rightarrow C_{8,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} \Rightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{(2 \cdot 1)6!} = 28$$

$$C_{8,2} = 28$$

b) $$\frac{\frac{7!}{3!4!} + \frac{6!}{4!2!}}{\frac{5!}{2!3!}} = \frac{35 + 15}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

$$\frac{C_{7,3} + C_{6,4}}{C_{5,2}} = 5$$

2. Com 8 pessoas, quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas?

Resolução:

Temos um típico problema de combinação simples, pois teremos grupos formados, onde os elementos de cada grupo são distintos e um grupo difere do outro apenas pela natureza dos elementos e não pela ordem dos mesmos, isto é, sendo um grupo composto, por exemplo, por: Rosângela, Sandra e Tânia ⇒ {R, S, T}, invertendo-se a ordem dessas pessoas, continuamos com a mesma comissão.

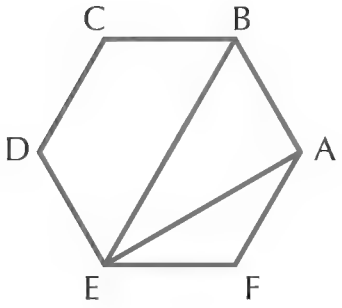
Temos, então:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8}{3!5!} = 56 \text{ comissões}$$

3. Em relação aos vértices do hexágono regular, pede-se:
   a) quantos segmentos de reta podem ser formados com extremos nos vértices do hexágono;
   b) quantas diagonais tem o hexágono.

Resolução:

a) Observando a figura:



Vamos escolher 2 pontos para cada segmento, por exemplo: $\overline{AB} = \overline{BA}$. Temos, então, o número de segmentos dado por:

$$n = 6 \text{ e } p = 2 \Rightarrow C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} =$$

$$= 15 \text{ segmentos possíveis}$$

b) Temos 15 segmentos possíveis. Desses, alguns são lados do hexágono (como, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ etc.) e outros são diagonais (como, $\overline{AE}$, $\overline{BE}$ etc.). Logo, subtraindo o número de lados do número total, temos 6 lados.

Portanto: nº de segmentos total − nº de lados = = nº de diagonais. Assim: 15 − 6 = 9 diagonais

4. Cristina fez um jogo na Sena, apostando os seguintes números: 10, 12, 24, 25, 27 e 43. Pergunta-se:
   a) Em quantas quinas ela jogou?
   b) Em quantas quadras ela jogou?
   c) Em quantos ternos ela jogou?

Resolução:

a) $C_{6,5} = \frac{6!}{5!1!} = \frac{6 \cdot 5!}{5!} = 6$ quinas

b) $C_{6,4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!(2 \cdot 1)} = 15$ quadras

c) $C_{6,3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!(3 \cdot 2 \cdot 1)} = 20$ ternos

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

23. Calcule:
   a) $C_{6,1}$ b) $C_{7,0}$ c) $C_{5,5}$

24. Calcule o valor da expressão: $X = 3 \cdot A_{10,2} - 2 \cdot P_4 + C_{10,1}$
25. Resolva a equação: $11 \cdot C_{x,2} = C_{x+2,4}$
26. No final de uma reunião, foram trocados 28 apertos de mão. Sabendo-se que cada pessoa cumprimentou todas as outras, quantas pessoas havia nessa reunião?
27. Em uma competição entre 10 participantes, determine o número de possibilidades que podem ser formadas entre os 4 primeiros colocados.
28. Uma urna contém 5 bolas de cores distintas (preta, branca, azul, verde e amarela). Calcule as possibilidades diferentes:
    a) se retirarmos 3 bolas de uma só vez;
    b) se retirarmos 3 bolas, uma de cada vez e recolocando na urna as sorteadas.
29. a) Quantas retas são determinadas por 7 pontos coplanares, dos quais 3 estão em linha reta?
    b) Calcule o número de diagonais de um decágono regular.
30. Retirando-se 5 cartas de um baralho de 52 cartas, quantas possibilidades existem de saírem 3 valetes nesta retirada?

7. Agrupamentos com repetição

Até agora, vimos agrupamentos em que não se repetem elementos. Entretanto, existem casos em que os elementos de um conjunto repetem-se para formar novos subconjuntos. Nestes casos, devemos usar fórmulas de *agrupamentos com repetição*. Assim, teremos:

a) arranjo com repetição;
b) permutação com repetição;
c) combinação com repetição.

7.1 Arranjo com repetição

Arranjo com repetição, ou arranjo completo, é um grupo de *p* elementos de um dado conjunto, com *n* elementos distintos, onde a mudança de ordem determina grupos diferentes, podendo porém ter elementos repetidos.

Indicamos o arranjo completo por $AR_{n,p}$.

No arranjo com repetição, temos todos os elementos do conjunto à disposição a cada escolha, por isso, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$AR_{n,\,p} = n^p$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Quantas chapas de automóvel compostas de 2 letras nas duas primeiras posições, seguidas por 4 algarismos nas demais posições (sendo 26 letras do nosso alfabeto e sendo os algarismos do sistema decimal) podem ser formadas?

Resolução:

O número de pares de letras que poderá ser utilizado é:

1º	2º
↓	↓
26	26

pois não há condição de que sejam distintas e podem, portanto, se repetir.

Assim, temos: $AR_{26,\,2} = 26^2 = 676$

A quantidade de quádruplas de números que poderá ser utilizadas nas chapas é:

1º	2º	3º	4º
↓	↓	↓	↓
10	10	10	10

Assim, $AR_{10,\,4} = 10^4 = 10.000$

Então, o número total de chapas que poderão ser feitas é:

$$676 \cdot 10.000 = 6.760.000 \text{ placas}$$

Observação: caso não pudesse ser utilizada, por exemplo, a seqüência AB 0000, isto é, número de chapa com 4 zeros, teríamos:

$$AR_{10,\,4} = 676 \cdot 10^4 - 10^4 = 10^4 \cdot (676 - 1)$$

7.2 Permutação com repetição

Assim como na permutação simples, a diferença entre arranjo e permutação é que esta faz uso de todos os elementos do conjunto. Na *permutação com repetição*, como o próprio nome indica, as repetições são permitidas e podemos estabelecer uma fórmula que relacione o número de elementos, *n*, e as vezes em que o mesmo elemento aparece.

$$P^{(\alpha, \beta, \chi, \ldots)} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\chi!} \ldots \quad (\text{com } \alpha + \beta + \chi + \ldots \leq n)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

Resolução:

$$\begin{cases} n = 5 \\ \alpha = 3, \text{ pois temos 3 letras A nessa palavra} \\ \beta = 2, \text{ pois temos 2 letras R nessa palavra} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{n!}{\alpha!\beta!} \Rightarrow P_5^{(3, 2)} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!(2 \cdot 1)} =$$

$$= 10 \text{ anagramas}$$

2. Quantos são os anagramas do nome MARINA?

Resolução:

$$\text{Temos: } \begin{cases} n = 6 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow p6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} =$$

$$= 360 \text{ anagramas}$$

3. De quantas maneiras podemos distribuir 7 doces entre 3 crianças, sendo que a mais nova recebe 3 doces e cada uma das outras recebe 2?

Resolução:

$$\text{Temos: } \begin{cases} n = 7 \\ \alpha = 3 \\ \beta = 2 \\ \chi = 2 \end{cases} \Rightarrow P_n^{(\alpha, \beta, \chi)} = P_7^{(3, 2, 2)} = \frac{7!}{3!2!2!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!(4)} = 210 \text{ maneiras}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

31. Quantos são os anagramas:
    a) da palavra MATEMÁTICA? b) do nome IDALINA?

32. Quantos números distintos podem ser formados permutando-se os algarismos do número 21.421?

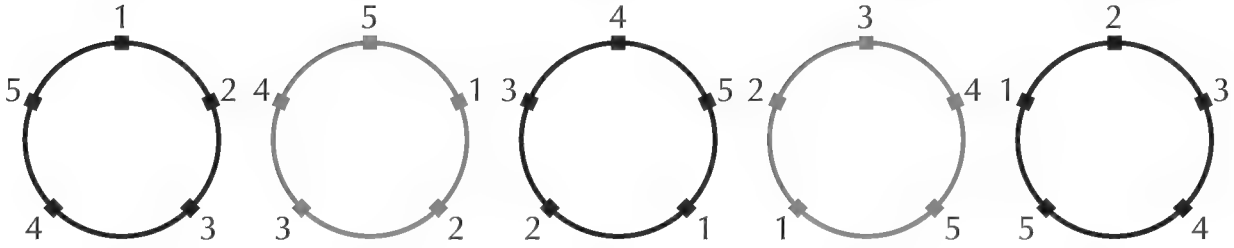
33. De quantas maneiras 6 alunos podem ser repartidos em 2 equipes contendo 3 alunos cada uma?

7.3 Permutação circular

No caso da permutação com repetição existe um caso especial, a *permutação circular*. Observe o exemplo a seguir.

Vamos determinar de quantas maneiras 5 meninas que brincam de roda podem formá-la.

Fazendo um esquema, observamos que são posições iguais:



O total de posições é 5! e cada 5 representa uma só permutação circular. Assim, o total de permutações circulares será dado por:

$$P_c^5 = \frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Generalizando, para determinar uma permutação circular, utilizamos a fórmula:

$$P_c^n = (n - 1)!$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

34. De quantas maneiras 7 meninas poderão formar a roda?

7.4 Combinação com repetição

Seja um conjunto com *n* elementos distintos, chama-se *combinação com repetição*, classe *p* (ou combinação completa *p* a *p*) dos *n* elementos desse conjunto, a todo grupo formado por *p* elementos, distintos ou não, em qualquer ordem.

A fórmula da combinação com repetição é:

$$CR_{n,\,p} = C_{n + p - 1,\,p}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Em uma combinação com repetição classe 2 do conjunto {a, b, c}, quantas combinações obtemos:

Resolução:

$$\left.\begin{array}{l} a\ a \quad b\ b \\ a\ b \quad b\ c \\ a\ c \quad c\ c \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \text{ combinações com repetições}$$

Utilizando a fórmula da combinação com repetição, verificamos o mesmo resultado sem a necessidade de enumerar todas as possibilidades:

$$n = 3 \text{ e } p = 2 \Rightarrow C_{3,\,2} = C_{3 + 2 - 1,\,2} = C_{4,\,2} = \frac{4!}{2!(4 - 2)!} = 6$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

35. Quantas combinações com repetição classe 3 podemos estabelecer com o conjunto {a, b}?

8. Casos particulares de números binomiais

Da definição de binomial, temos três conseqüências:

I) $\boxed{p = 0 \Rightarrow \binom{n}{0} = 1}$, $(\forall\ n \in \mathbb{N})$, pois:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

II) $\boxed{p = 1 \Rightarrow \binom{n}{1} = n}$, $(\forall\ n > 1 \text{ e } n \in \mathbb{N})$, pois:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1(n-1)!} = n$$

III) $\boxed{p = n \Rightarrow \binom{n}{n} = 1}$, $(\forall\ n \in \mathbb{N})$, pois:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!1} = 1$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule X, sendo $X = \binom{4}{4} + \binom{6}{0} + \binom{7}{1}$.

Resolução:

$$\frac{4!}{4!(4-4)!} + \frac{6!}{0!(6-0)!} + \frac{7!}{1!(7-1)}$$

$$X = \frac{4!}{4!0!} + \frac{6!}{0!6!} + \frac{7!}{1 \cdot 6!}$$

$$X = \frac{4!}{4!(1)} + \frac{6!}{(1)6!} + \frac{7 \cdot 6!}{6!} \Rightarrow X = 1 + 1 + 7 \Rightarrow \boxed{X = 9}$$

9. Números binomiais complementares

Dois binômios, $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$, são considerados complementares quando $m = n$ e $p + q = n$, ou $q = n - p$.

Exemplos:

a) $\binom{6}{1}$ e $\binom{6}{5}$ são complementares, pois: $p + q = 1 + 5 = 6 = n$

b) $\binom{n}{5}$ e $\binom{n}{n-5}$ são complementares, pois: $5 + (n - 5) = 5 + n - 5 = n$

9.1 Propriedade dos números binomiais complementares

Pela definição de números binomiais, temos que os números binomiais complementares são iguais, ou seja: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule $\binom{8}{3}$ e $\binom{8}{5}$

Resolução:

Observemos que os dois números binomiais são complementares, pois: $n = 8$ e $n + p = 3 + 5 = 8 = n$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} \Rightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{(6)5!} \text{ e}$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} \Rightarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{(5)6!} = 56$$

2. Resolva a equação: $\binom{7}{x} = \binom{7}{5}$

Resolução:

Esta igualdade compreende duas soluções:

a) Se os binômios forem complementares, podemos escrever:

$$x + 5 = 7 \Rightarrow x = 2$$

b) Se os binômios forem iguais, podemos escrever: $x = 5$

Os dois valores satisfazem a condição de existência de $\binom{n}{p}$, $(n, p, \in \mathbb{N}, \text{ e } p \leqslant n)$, pois:

$$\binom{7}{2} = \binom{7}{5} \text{ e } \binom{7}{5} = \binom{7}{5}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36. Calcule:

a) $\binom{9}{6}$ c) $\binom{13}{0}$ e) $\binom{15}{1}$ g) $\binom{5}{3}$

b) $\binom{7}{4}$ d) $\binom{21}{21}$ f) $\binom{5}{2}$

37. Resolva as equações:

a) $\binom{16}{2x+6} = \binom{16}{5x+3}$ b) $\binom{12}{2x} = \binom{12}{3}$ c) $\binom{12}{x+8} = \binom{12}{5x}$

10. Números binomiais consecutivos

Dois números binomiais são consecutivos quando têm o mesmo valor para *n* e suas classes respectivas são inteiros consecutivos. Exemplo:

$\binom{12}{9}$ e $\binom{12}{10}$ são números binominais consecutivos.

Sendo:

$\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ dois números binominais, se eles são consecutivos, então $q = p - 1$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Verifique se os números binomiais são consecutivos:

a) $\binom{8}{6}$ e $\binom{8}{5}$

b) $\binom{12}{x}$ e $\binom{12}{x+1}$

Resolução:

a) $\binom{n}{p} = \binom{8}{6}$ e $\binom{n}{q} = \binom{8}{5}$, temos que:

$q = p - 1 \Rightarrow 5 = 6 - 1$.

Portanto, $\binom{8}{6}$ e $\binom{8}{5}$ são números binominais consecutivos.

b) $x = q \Rightarrow x = (x + 1) - 1 \Rightarrow$ são consecutivos $(\forall\ x \in \mathbb{N})$.

Logo, $\binom{12}{x}$ e $\binom{12}{x+1}$ são números binominais consecutivos.

11. Propriedade dos números binomiais consecutivos (Relação de Stiffel)

Ao somar dois números binomiais consecutivos, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

que denominamos relação de Stiffel.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule $\binom{5}{3} + \binom{5}{4}$

Resolução:

Como $\binom{5}{3}$ e $\binom{5}{4}$ são números binomiais consecutivos, então, pela relação de Stiffel, temos:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Logo, $n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 \Rightarrow n = 6$ e $p = 4$

Portanto, $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$

2. Resolva a equação: $\binom{8}{6} + \binom{8}{7} = \binom{9}{x+3}$

Resolução: Temos que: $x + 3 = 7 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{4\}$

EXERCÍCIO PROPOSTO

38. Calcule $\binom{10}{3} + \binom{10}{4}$.

12. Triângulo de Tartaglia-Pascal

É uma maneira de dispor os números binomiais, formando um triângulo.

As propriedades desse triângulo, embora já fossem conhecidas desde o século XII ou XIII, foram sistematizadas somente no século XVII, por Blaise Pascal.

Assim:

$$\binom{0}{0} \qquad\qquad 1$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1} \qquad\qquad 1 \quad 1$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \qquad\qquad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \qquad\qquad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

....

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\ldots\binom{n}{n} \qquad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad n$$

Observe a lei de formação nesse triângulo:

a) os números binomiais que têm o mesmo valor para n estão colocados na mesma linha;
b) os números binomiais que têm o mesmo valor para p estão colocados na mesma coluna.

12.1 Propriedades do Triângulo de Pascal

a) Em toda linha, o primeiro e o último elementos são iguais a 1, pois têm a forma:

$\binom{n}{0}$ e $\binom{n}{n}$, respectivamente.

b) Em uma linha qualquer, dois números binomiais eqüidistantes dos extremos são iguais, pois são números binomiais complementares.
Observe as linhas:

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

c) Qualquer elemento não extremo, a partir do segundo termo da terceira linha, pode ser obtido aplicando-se a relação de Stiffel.

d) A soma dos números binomiais de uma mesma linha é uma potência de base 2, onde o expoente é a ordem da linha dada pelo numerador. Assim, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Obtenha o valor de *n*, sabendo-se que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 4$.

Resolução:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 4 \Rightarrow 2^n = 4 \Rightarrow 2^n = 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 2}$$

13. Binômio de Newton

O teorema do binômio é atribuído ao físico e matemático Isaac Newton (1623-1727), mas sua forma empírica já era conhecida pelos chineses e árabes desde os séculos XII e XIII.

O nome de Newton permaneceu associado ao binômio porque foi ele que generalizou seu estudo para expoentes racionais.

O triângulo de Pascal é extremamente útil no desenvolvimento de binômios do tipo $(x + a)^n$, chamado binômio de Newton, com $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Observemos a relação entre o triângulo de Pascal e os binômios:

Coeficientes dos termos

$$n = 0 \Rightarrow (x + a)^0 \binom{0}{0} = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow (x + a)^1 = \binom{1}{0}x^1a^0 + \binom{1}{1}x^0a^1 = x + a$$

$$n = 2 \Rightarrow (x + a)^2 = \binom{2}{0}x^2a^0 + \binom{2}{1}x^1a^1 + \binom{2}{2}x^0a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$n = 3 \Rightarrow (x + a)^3 \binom{3}{0}x^3a^0 + \binom{3}{1}x^2a^1 + \binom{3}{2}x^1a^2 + \binom{3}{3}x^0a^3 =$$

$$= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

.....

Assim, podemos definir o binômio de Newton em termos gerais para x e a $\in \mathbb{R}$ e n $\in \mathbb{N}$, da seguinte maneira:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + ... + \binom{n}{n}a^nx^0$$

Observe que:

a) o número de termos do desenvolvimento de $(x + a)^n$ é $(n + 1)$;

b) os coeficientes binomiais dos termos do desenvolvimento formam uma linha do triângulo de Pascal;

c) os expoentes de *a* crescem de zero a *n*;

d) os expoentes de *x* decrescem de *n* a zero.

Vale salientar que, em binômios da forma $(x - a)^n$, os sinais devem ser alternados entre + e −.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Desenvolva os binômios, utilizando a fórmula do binômio de Newton:

   a) $(x + 2)^2$ b) $(x + 1)^3$

Resolução:

a) $(x + 2)^2 = \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} x^1 + \binom{2}{2} \cdot 2^2$

$1 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 2^2 = x^2 + 2x + 4$

b) $(x + 1)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 \cdot 1 + \binom{3}{2} x^1 \cdot 1^2 + \binom{3}{3} \cdot 1^3 =$

$= 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

2. Desenvolva o binômio $(x + 2)^4$.

Resolução:

$(x + 2)^4 =$

$= \binom{4}{0} x^4 \cdot 2^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot 2^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3} x^1 \cdot 2^3 +$

$+ \binom{4}{4} x^0 \cdot 2^4 = 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot x^2 \cdot 4 +$

$+ 4x^1 \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

14. Fórmula do termo geral

Observemos o desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} a^n x^0$$

Observe a relação entre os expoentes dos termos e o número binomial nos termos:

$$T_1 = \binom{n}{0} a^0 x^n$$

$$T_2 = \binom{n}{1} a^1 x^{n-1}$$

$$T_3 = \binom{n}{2} a^2 x^{n-2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$T_{n+1} = \binom{n}{n} a^n x^0 \Rightarrow \text{último termo}$$

De onde podemos concluir que a relação entre o índice do termo e o denominador do número binomial é:

$$T_n = \binom{n}{n-1}$$

Se substituirmos o índice do termo pela expressão $p + 1$, teremos:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

Para o binômio-diferença $(x - a)^n$, temos dois casos:

a) quando a classe é *par*, o sinal que precede o termo é positivo, pois $(-1)^{par} = +1$;
b) quando a classe é *ímpar*, o sinal que precede o termo é negativo, pois $(-1)^{ímpar} = -1$

Assim, a fórmula do termo geral pode ser definida como:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule o décimo termo do desenvolvimento de $(x - y)^{12}$.

Resolução:

$$p + 1 = 10 \Rightarrow p = 9$$

$$n = 12$$

Substituindo esses valores na fórmula, temos:

$$T_{p+1} = (-1)^9 \cdot \binom{12}{9} \cdot y^9 \cdot x^{12-9}$$

$$T_{10} = (-1) \cdot \frac{12!}{9!3!} \cdot y^9x^3 \Rightarrow T_{10} = -220y^9x^3$$

Leia sobre A genética e as probabilidades no Encarte Colorido.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

39. Calcule *n*, dado:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 512.$$

40. Calcule:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

41. Desenvolva os binômios:

a) $(x - 1)^5$ c) $(1 + \frac{3}{2}a)^5$

b) $(2x - 3y)^4$

42. (FEI-SP) Desenvolva, usando a fórmula do binômio de Newton:
$(x - 1)^3 \cdot (x + 1)^3$.

43. (UFPI) No desenvolvimento do binômio $(3x^2 + a)^4$, o terceiro termo é:

a) $12x^4a^2$ b) $12x^2a^3$ c) $54x^4a^2$ e) $108x^6a$

d) $108x^4a^2$

44. (UFSC) Desenvolvendo o binômio $(x + \frac{1}{x})^6$, o valor do termo independente de *x* é:

45. (UFPA) O coeficiente do termo em x^{12} no desenvolvimento de $(2x^2 + x)^{10}$ é igual a:

a) 180 c) 45 e) $A_{10, 2}$

b) 190 d) $A_{10, 8}$

46. (Mackenzie-SP) Um dos termos no desenvolvimento de $(x + 3a)^5$ é $360x^3$. Sabendo-se que *a* não depende de *x*, o valor de *a* é:

a) ±1 c) ±3 e) ±5

b) ±2 d) ±4

Capítulo 11

Probabilidade e Estatística

A teoria das probabilidades surgiu no século XVI, com o estudo dos jogos de azar, tais como jogos de cartas e roleta.

O primeiro matemático a conceituar *probabilidade* parece ter sido Cardano, ou Cardan (1501-1576). Porém, o ponto de partida para o desenvolvimento da teoria das probabilidades deve-se, principalmente, a dois matemáticos: Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665).

Esta teoria foi utilizada por Mendel em seus estudos sobre genética. Atualmente, a teoria das probabilidades está intimamente relacionada com a Estatística, que tem aplicações em diversos ramos do conhecimento.

1. Definição

Às situações ou experimentos que, sendo realizados repetidas vezes, nas mesmas condições, apresentam resultados diferentes chamamos *experimentos probabilísticos* ou *aleatórios*.

A teoria da probabilidade é o ramo da Matemática que cria e desenvolve modelos matemáticos para estudar os experimentos aleatórios.

2. Elementos da teoria das probabilidades

Para que se possa efetuar qualquer cálculo utilizando a teoria das probabilidades, são necessários dois elementos:

- *espaço amostral*: é o conjunto U, de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório;
- *evento*: é qualquer subconjunto de um espaço amostral, ou seja, qualquer que seja $E \subset U$, onde E é o evento e U, o espaço amostral.

Representamos o espaço amostral e os eventos por letras maiúsculas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Lança-se uma moeda e lê-se a figura da face voltada para cima. Pede-se:
   a) o espaço amostral;
   b) o número de elementos do espaço amostral;
   c) o número de elementos dos eventos.

Resolução:

a) Espaço amostral: U = {cara, coroa}.
Sendo c = cara e k = coroa, temos: $U = \{c, k\}$

b) O número de elementos do espaço amostral U é 2.
Então, escrevemos: $n(U) = 2$

c) Sejam os eventos: $E_1 = \{c\} \Rightarrow E_1 \subset U$ e $E_2 = \{k\} \Rightarrow E_2 \subset U$
Portanto, a quantidade de elementos dos eventos é:

$$n(E_1) = 1 \text{ e } n(E_2) = 1$$

2. Lança-se um dado e lê-se o número voltado para cima.
   a) Calcule o espaço amostral.
   b) Calcule o número de elementos do espaço amostral.
   c) Determine o evento: ocorrência de um número maior que quatro.
   d) Determine o evento: ocorrência de um número par.

Resolução:

a) Espaço amostral: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $n(U) = 6$

c) Evento $E_1 = \{5, 6\}$

d) Evento $E_2 = \{2, 4, 6\}$

3. Experimento composto

Quando temos dois ou mais experimentos realizados simultaneamente, dizemos que o experimento é *composto*.

Nesse caso, o número de elementos do espaço amostral é dado pelo produto dos números de elementos dos espaços amostrais de cada experimento.

Vamos utilizar como exemplo um jogo de dados e determinar o espaço amostral ao lançarmos dois dados simultaneamente.

$U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U_1) = 6$

$U_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U_2) = 6$

Logo: $\boxed{n(U) = n(U_1) \cdot n(U_2)}$

Portanto, $n(U) = 6 \cdot 6 = 36$ elementos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ao lançar uma moeda e um dado, simultaneamente, calcule o número de elementos de U.

Resolução:

$\begin{cases} U_1\text{: espaço amostral do lançamento da moeda} \\ U_1 = \{c, k\} \Rightarrow n(U_1) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} U_2\text{: espaço amostral do lançamento do dado:} \\ U_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U_2) = 6 \end{cases}$

Logo, $n(U) = n(U_1) \cdot n(U_2) \Rightarrow n(U) = 2 \cdot 6 = 12$

$n(U) = 12$ elementos

2. Obtenha o espaço amostral do lançamento simultâneo de três moedas.

Resolução: 1ª moeda: $U_1 = \{c, k\}$
2ª moeda: $U_2 = \{c, k\}$
3ª moeda: $U_3 = \{c, k\}$

Se quiséssemos saber o número de elementos do espaço amostral U, teríamos:

$n(U) = n(U_1) \cdot n(U_2) \cdot n(U_3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ elementos

$n(U) = 8$ ternas de elementos

4. Probabilidade de um evento

Em um espaço amostral U, eqüiprobabilístico (com elementos que têm chances iguais de ocorrer), com n(U) elementos, o evento E, com n(E) elementos, onde $E \subset U$, a probabilidade de ocorrer o evento E, denotado por p(E), é o número real, tal que:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(U)}$$

As probabilidades podem ser escritas na forma decimal ou representadas em porcentagem. Assim: $0 \leqslant p(E) \leqslant 1$, onde:

$p(\varnothing) = 0$ ou $p(\varnothing) = 0\%$

$p(U) = 1$ ou $p(U) = 100\%$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Jogando uma moeda, qual a probabilidade de ocorrer "cara"?

Resolução:

Temos: $U = \{\text{cara, coroa}\} \Rightarrow n(U) = 2$

$E = \{\text{cara}\} \Rightarrow n(E) = 1$

Portanto: $p(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{1}{2}$ ou 50%

2. Lançando-se um dado, qual a probabilidade de:
   a) ocorrer uma face igual a 5?
   b) ocorrer uma face maior que 4?

Resolução:

a) Temos: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U) = 6$

E_1: ocorrer uma face igual a $5 \Rightarrow E_1 = \{5\} \Rightarrow n(E_1) = 1$

Logo, $p(E_1) = \dfrac{n(E_1)}{n(U)} = \dfrac{1}{6} \simeq 0{,}16\%$

b) E_2: ocorrer uma face maior que $4 \Rightarrow E_2 = \{5, 6\} \Rightarrow n(E_2) = 2$

Logo: $p(E_2) = \dfrac{n(E_2)}{n(U)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \simeq 0{,}33\%$

3. De um baralho de 52 cartas, tira-se uma delas. Calcule a probabilidade de que a carta seja:
   a) um rei;
   b) um valete de paus;
   c) uma carta de ouros;
   d) uma carta que não seja de ouros.

Resolução:

$n(U) = 52$

a) E_1: ocorrer um rei $\Rightarrow E_1 =$ {rei de ouros, rei de paus, rei de copas, rei de espada} $\Rightarrow n(E_1) = 4$

Portanto: $p(E_1) = \dfrac{n(E_1)}{n(U)} = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

b) E_2: um valete de paus $\Rightarrow n(E_2) = 1$

Logo: $p(E_2) = \dfrac{n(E_2)}{n(U)} = \dfrac{1}{52}$

c) E_3: uma carta de ouros. Como há 4 naipes, então cada naipe tem $52 \div 4 = 13$ cartas $\Rightarrow n(E_3) = 13$

Logo: $p(E_3) = \dfrac{n(E_3)}{n(U)} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4} = 25\%$

d) E_4: uma carta que não seja de ouros. Temos 13 cartas de ouros, logo: $52 - 13 = 39$ cartas que não são de ouros $\Rightarrow n(E_4) = 39$

Logo: $p(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(U)} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4} = 75\%$

4. Uma classe é composta de 5 alunos do primeiro ano, 4 do segundo, 8 do terceiro e 3 do quarto. Um aluno é escolhido, ao acaso, para representar a classe. Calcule a probabilidade de que esse aluno seja:

a) do 1º ano;
b) do 2º ano;
c) do 3º ano;
d) do 4º ano.

Resolução:

$n(U) = 5 + 4 + 8 + 3 \Rightarrow n(U) = 20$

a) E_1: 1º ano $\Rightarrow n(E_1) = 5 \Rightarrow p(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(U)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

b) E_2: 2º ano $\Rightarrow n(E_2) = 4 \Rightarrow p(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(U)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

c) E_3: 3º ano $\Rightarrow n(E_3) = 8 \Rightarrow p(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(U)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

d) E_4: 4º ano $\Rightarrow n(E_4) = 3 \Rightarrow p(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(U)} = \frac{3}{20}$

5. Em um sorteio, concorrem todos os números inteiros de 1 a 100. Escolhendo-se um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de que o número sorteado tenha dois algarismos, sendo que todos são eqüiprobabilísticos?

Resolução:

$U = \{1, 2, 3, ..., 100\} \Rightarrow n(U) = 100$

E: números de 2 algarismos $\Rightarrow$ E = {10, 11, 12, ..., 99}

n(E) = 90

Logo: $p(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} =$ 90%

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. De um baralho de 52 cartas, tira-se ao acaso uma dela. Calcule a probabilidade de que a carta seja:

   a) um valete;

   b) um valete de copas;

   c) uma carta de ouros.

2. No lançamento simultâneo de dois dados, calcule a probabilidade de:

   a) a soma deles ser igual a 7;

   b) os números serem iguais;

   c) os números serem diferentes.

3. Uma rifa é composta por 100 bilhetes. Sérgio compra 20 bilhetes e Morgana compra 25. Qual a probabilidade de cada um ser sorteado?

4. Em uma urna há 50 cartões numerados de 1 a 50. Um cartão é retirado ao acaso. Determinar a probabilidade de que o número do cartão e:

   a) seja primo;

   b) termine com o algarismo 7.

5. Probabilidade da união de eventos

Para obtermos a probabilidade da união de eventos, pela definição de probabilidades, utilizamos a seguinte expressão:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Em uma urna existem 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ocorrer múltiplos de 2 ou de 3?

Resolução:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(U) = 10$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow n(A) = 5$

$B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow n(B) = 3$

$A \cap B = \{6\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$

Portanto, temos:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$p(A \cup B) = \frac{p(A)}{n(U)} + \frac{p(B)}{n(U)} - \frac{p(A \cap B)}{n(U)}$$

$$p(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} \Rightarrow p(A \cup B) = \boxed{\frac{7}{10}}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. Retirando-se uma carta de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de ocorrer uma dama ou uma carta de ouros?

6. Lançando-se um dado, calcule a probabilidade de sair o número 5 ou um número par.

7. Retirando-se uma carta de um baralho comum (de 52 cartas), determine a probabilidade de sair rei ou dama.

6. Probabilidade de um evento complementar

Para determinarmos a probabilidade de um evento complementar, devemos primeiro definir:

$E + \bar{E} = U$, o que vale dizer que: $n(E) + n(\bar{E}) = n(U)$

Dividindo-se os termos da equação por n(U), temos:

$$\frac{n(E)}{n(U)} + \frac{n(\bar{E})}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)} \Rightarrow \boxed{p(E) + p(\bar{E}) = 1}$$

Portanto, a soma das probabilidades de ocorrer o evento E e de não ocorrer o evento E (seu complementar, $\bar{E}$) é 1.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Demonstre que, no lançamento de um dado, o evento complementar do evento "número ímpar" é o evento "número par".

Resolução:

Considerando $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, temos:

$$E = \{1, 3, 5\} \text{ e } \bar{E} = \{2, 4, 6\}$$

Observamos que:

a) $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow E \cup \bar{E} = U$

b) $\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \varnothing \Rightarrow E \cap \bar{E} = \varnothing$

Portanto: $p(E) + p(\bar{E}) = 1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8. Seja o lançamento de dois dados, calcule a probabilidade de que o máximo entre os dois resultados seja maior ou igual a 3. (*Sugestão*: considere E = "o máximo entre os dois resultados é maior ou igual a 3"e $\bar{E}$ = "o máximo entre os dois resultados é menor que 3".)
9. Dado o evento "retirar uma carta de ouros de um baralho de 52 cartas", calcule p(E) e $p(\bar{E})$.
10. Três lâmpadas são retiradas, ao acaso, de um grupo de 15 lâmpadas, das quais 5 são defeituosas. Calcule a probabilidade de que:
    a) nenhuma seja defeituosa;
    b) só uma seja defeituosa;
    c) pelo menos uma seja defeituosa.

7. Probabilidade da intersecção de eventos

Sejam A e B dois eventos independentes de um mesmo espaço amostral U. Então, vale a igualdade:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

conhecida por *Teorema do Produto.* O conectivo que indica a intersecção de eventos é o *e*.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

No lançamento de um dado e de uma moeda, considerando E_1 o evento "face cara" e E_2 o evento "face par", obtenha o evento "face cara *e* face par".

Resolução:

Analisando isoladamente cada evento, temos:

$E_1 = \{c\} \Rightarrow n(E_1) = 1$

$U_1 = \{cara, coroa\} \Rightarrow n(U_1) = 2$

$E_2 = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(E_2) = 3$

$U_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U_2) = 6$

Logo: $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \Rightarrow p(E_1 \cap E_2) = 25\%$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11. Jogando-se um dado 4 vezes seguidas, qual a probabilidade de ocorrer o número 3 (face 3) quatro vezes?

12. Em uma urna há 10 bolas: 7 azuis e 3 brancas. Em uma outra urna há 7 bolas: 5 azuis e 2 brancas. Sorteando-se uma bola de cada urna, determine a probabilidade de que:
    a) a bola retirada da primeira urna seja azul e a da segunda urna seja branca;
    b) a bola retirada da primeira urna seja branca e a da segunda urna seja azul.

13. Qual a probabilidade de um casal ter 4 filhos e todos do sexo masculino?

8. Probabilidade condicional

Quando se impõe uma *condição* que reduz o espaço amostral, dizemos que se trata de uma *probabilidade condicional*.

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral U, com $p(B) \neq 0$. Chama-se probabilidade de A *condicionada* a B a probabilidade de ocorrência do evento A, sabendo-se que já ocorreu ou que va/¿ocorrer o evento B, ou seja,

$$p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Jogando-se um dado e sabendo-se que ocorreu um número maior que 3, qual é a probabilidade de sair um número ímpar?

Resolução:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_1 = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(E_1) = 3$ e

$E_2 = \{4, 5, 6\} \Rightarrow n(E_2) = 3$

Temos que $E_1 \cap E_2 = \{5\} \Rightarrow$

$n(E_1 \cap E_2) = 1$

Logo: $p(E_1/E_2) = \dfrac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_2)} \Rightarrow p(E_1/E_2) = \dfrac{1}{3}$

2. Em uma caixa há papeizinhos numerados de 1 a 10. Um deles será sorteado. Sabendo-se que o número desse papelzinho é menor que 6, determine a probabilidade de ele ser par.

Resolução:

E_1: número menor que $6 \Rightarrow E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow n(E_1) = 5$

E_2: número par $\Rightarrow E_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow n(E_2) = 5$

$E_1 \cap E_2 = \{2, 4\} \Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 2$

Então: $p(E_2/E_1) = \dfrac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow p(E_2/E_1) = 40\%$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

14. Em uma caixa há 5 papeizinhos numerados de 1 a 5. Serão retirados sucessivamente 2 papeizinhos da caixa, sem reposição do primeiro. Qual é a probabilidade de que os dois números sorteados sejam ímpares?

15. (PUC-Campinas-SP) Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma dos dois dados é 8, calcule a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles.

9. Lei binominal das probabilidades

A lei binominal das probabilidades é dada pela fórmula:

$$p = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Sendo:

n: número de tentativas independentes;

p: probabilidade de ocorrer o evento em cada experimento (sucesso);

q: probabilidade de *não* ocorrer o evento (fracasso);

$$q = 1 - p$$

k: número de sucessos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Lançando-se um dado 5 vezes, qual a probabilidade de ocorrerem três faces 6?

Resolução:

n: número de tentativas $\Rightarrow n = 5$

k: número de sucessos $\Rightarrow k = 3$

p: probabilidade de ocorrer face 6 $\Rightarrow p = \frac{1}{6}$

q: probabilidade de não ocorrer face 6 $\Rightarrow q = 1 - p \Rightarrow q = \frac{5}{6}$

Logo, a probabilidade é dada por:

$$p = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow p = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}^{5-3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{5!}{3!2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \Rightarrow p = \frac{250}{6^5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{125}{3.888} \simeq 0{,}032 \Rightarrow p \simeq 3{,}2\%}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. Um jogador tem $\frac{2}{3}$ de probabilidade de vencer sempre que jogar. Se ele realiza 4 jogos, determinar a probabilidade de que ele vença:
    a) exatamente 2 jogos;
    b) mais da metade dos jogos.

17. Mirtes tem $\frac{1}{4}$ de probabilidade de acertar em um alvo. Se ela atira 7 vezes, qual a probabilidade de acertar o alvo pelo menos duas vezes?

18. A probabilidade de que um estudante universitário não se forme é 0,3. Escolhem-se 5 estudantes universitários ao acaso. Determine a probabilidade de que:
    a) um deles não se forme;
    b) três deles não se formem;
    c) pelo menos um não se forme.

19. (Mauá-SP) Lançam-se dois dados com faces numeradas de 1 a 6. Calcule a probabilidade de que a soma obtida seja 10.

20. (FEI-SP) Jogando-se dois dados, qual a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja 4 ou 5?

21. (UFMG) Dos 100 alunos de uma turma, 40 gostam de Álgebra, 30 gostam de Geometria, 15 gostam de Álgebra e Geometria. Um aluno é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade percentual de que ele não goste de Álgebra nem de Geometria?

22. (Vunesp) Em uma gaiola estão 9 camundongos rotulados de 1, 2, 3, ..., 9. Selecionando-se conjuntamente 2 camundongos ao acaso (todos têm igual possibilidade de ser escolhidos), a probabilidade de que na seleção ambos os camundongos tenham rótulo ímpar é:

a) 0,3777... b) 0,47 c) 0,17 d) 0,2777... e) 0,1333...

23. (Fuvest-SP) Uma urna contém 3 bolas: uma verde, uma azul e uma branca. Tira-se uma bola ao acaso, registra-se a cor e coloca-se a bola de volta na urna. Repete-se essa experiência mais duas vezes. Qual a probabilidade de serem registradas três cores distintas?

24. (Cescea-SP) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Retira-se dela uma bola. Considere os eventos:
A = {a bola retirada possui um número múltiplo de 2}
B = {a bola retirada possui um número múltiplo de 5}
Então, a probabilidade do evento A ∪ B é:

a) $\frac{13}{20}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{11}{20}$

25. (UFRRJ) De uma urna que contém 2 bolas vermelhas, 2 brancas e 2 verdes, retiramos 4 bolas sem repô-las. Qual a probabilidade de entre as bolas retiradas haver:

a) um par de bolas de mesma cor; b) apenas duas cores.

26. (Cesgranrio-RJ) Considerando-se um hexágono regular e tomando-se ao acaso uma de suas diagonais, a probabilidade de que ela passe pelo centro do hexágono é de:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{2}{3}$

10. Estatística

10.1 Definição

A Estatística é a ciência que faz uso de números para descrever fatos.

Na Estatística, chamamos *dados estatísticos* os dados numéricos que nos permitem descrever e avaliar os fatos para fazermos previsões e estimativas ou tomarmos decisões.

Os dados estatísticos podem ser representados por meio de tabelas ou gráficos.

10.2 Tabelas

As tabelas dispõem os dados estatísticos de modo comparativo. Por exemplo:

Para determinar a preferência pelos jornais A, B ou C, foram entrevistadas 2.000 pessoas. A pesquisa revelou o seguinte:

Jornais	Nº de pessoas	% das pessoas
A	1.400	70
B	240	12
C	360	18
Total	2.000	100

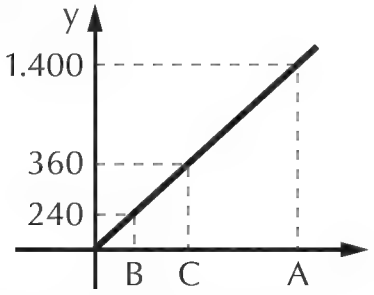
Com base nesta pesquisa, os jornais B e C podem concluir que seus produtos devem sofrer algum tipo de modificação para ganhar o público-leitor.

10.3 Gráficos

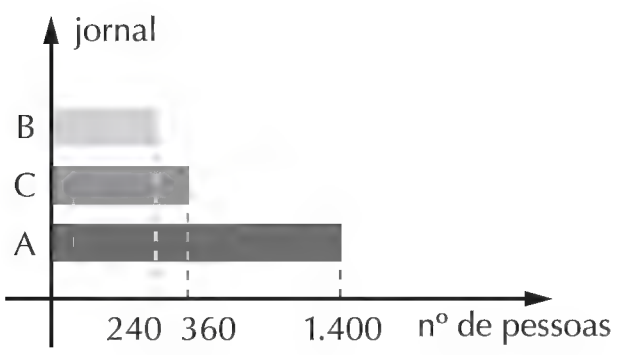
As representações gráficas dos dados estatísticos facilitam a "leitura" dos resultados, que se tornam bem mais visíveis do que em tabelas.

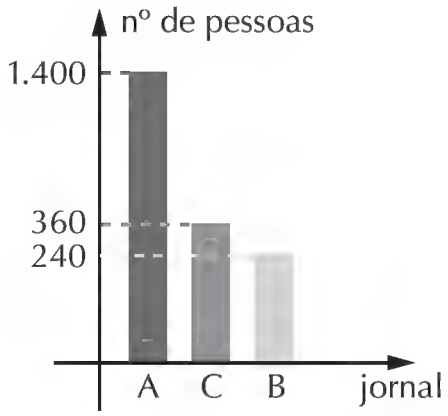
Os gráficos mais utilizados são:

- *Gráfico de segmento de reta:*



- *Gráfico de barras ou histograma:*



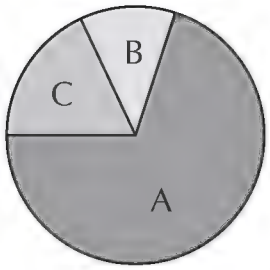


- *Gráfico setorial:*

  A representa 70%

  B representa 12%

  C representa 18%



11. Medidas de tendência central

Uma maneira útil de descrever um grupo como um todo consiste em encontrar um único número que represente o que é "médio" ou característico naquele particular conjunto de dados.

Quando se trata de pesquisa, esse valor é conhecido por *medida de tendência central*, pois ela geralmente se localiza em torno do meio ou centro de uma distribuição.

As três medidas de tendência central mais conhecidas são: média aritmética, moda e mediana.

11.1 Média aritmética (Ma)

É a medida de tendência central mais usada. A média aritmética é o cociente entre a soma de *n* valores e o número *n* de valores desse conjunto. Exemplo:

Maísa teve as seguintes notas nas provas de Matemática do 1º semestre: 6,5; 7,0; 9,5; 4,0 e 8,0.

Para obter uma nota que representará seu aproveitamento no semestre, calculamos a média aritmética (Ma) de suas notas:

$$Ma = \frac{6,5 + 7,0 + 9,5 + 4,0 + 8,0}{5} = \frac{35,0}{5} = 7,0$$

11.2 Moda (Mo)

A moda de um conjunto de *n* números é o valor que ocorre com maior freqüência, isto é, o valor mais comum. Exemplo:

Na seqüência numérica: 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18 a moda é 9, pois é o número que aparece com maior freqüência (Mo = 9).

Há casos em que pode haver mais de uma moda, como, por exemplo, na seqüência: 5, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10, 10; há duas modas: 7 e 10. Portanto: Mo = 7 e 10. Em outros, pode não existir a moda.

11.3 Mediana (Md)

Mediana de um conjunto de *n* valores é o valor que ocupa a posição central quando esses dados são colocados em ordem crescente ou decrescente. Exemplo:

Nos dados: 126, 198, 164, 460 e 188, temos cinco elementos que, colocados em ordem crescente, irão fornecer-nos a mediana: 126, 164, 188, 198, 460. Como a mediana é o termo central da seqüência numérica, temos: Md = 188.

No caso do número de elementos ser par, a mediana será a média aritmética entre os dois termos centrais. Exemplo:

68, 72, 78, 84, 87, 91

(termos centrais)

A mediana é a média aritmética entre 78 e 84. Portanto temos:

$$Md = \frac{78 + 84}{2} = \frac{162}{2} = 81$$

Para complementar o estudo das médias, vale ainda acrescentar:

Leia sobre o Efeito Estufa no Encarte Colorido.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

27. Determine a média aritmética, a mediana e a moda dos dados abaixo:
    a) 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6
    b) 50, 35, 20, 90, 15
    c) 3, 3, 4, 3, 1, 6, 5, 6, 6, 4
    d) 5, 4, 6, 6, 1, 3

28. Oito empregados diaristas em uma companhia de porte médio ganham R$ 153,00; R$ 136,00; R$ 153,00; R$ 68,00; R$ 17,00; R$ 102,00; R$ 51,00 e R$ 17,00. Calcule:
    a) o salário diário modal (isto é: a moda);
    b) o salário diário mediano;
    c) o salário diário médio.

29. (UFG-GO) Sejam *x* e y dois números reais positivos. Define-se a média aritmética e a média geométrica entre esses números da seguinte forma:

$A = \left(\frac{x + y}{2}\right)$ (média aritmética)

$G = \sqrt{x \cdot y}$ (média geométrica)

Nestas condições, pode-se afirmar que:

(01) Caso $x = 14$ e $y = 56$, $A = 35$ e $G = 28$.

(02) Se $x = y$, então $A = G$.

(04) Se $0 < x < y$, então $x < A < y$.

(08) Se $0 < x < y$, temos $G < A$.

(16) Quaisquer que sejam x, y positivos, $|A - x| = |A - y| \simeq$

(32) $\log G = \frac{(\log x + \log y)}{2}$

Some os valores das alternativas corretas.

30. (Enem-MEC) Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número dentre dez.

1ª opção: comprar três números para um único sorteio.

2ª opção: comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio.

3ª opção: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

Se X, Y, Z representam as probabilidades de o apostador ganhar algum prêmio, escolhendo, respectivamente, a 1ª, a 2ª ou a 3ª opções, é correto afirmar que:

a) $X < Y < Z$ d) $X = Y > Z$

b) $X = Y = Z$ e) $X > Y > Z$

c) $X > Y = Z$

31. (Enem-MEC) Escolhedo a 2ª opção do exercício anterior, a probabilidade de o apostador **não ganhar** em qualquer dos sorteios é igual a:

a) 90% c) 72% e) 65%

b) 81% d) 70%

Capítulo 12

Matemática Financeira

Quando entramos em uma loja que oferece um produto com mais de uma forma de pagamento, como saber qual a melhor opção de compra?

É nesse sentido que a matemática financeira é util em nosso dia-a-dia, pois compreendendo-a teremos em mãos as ferramentas para entender os sistemas atuais de financiamento ou as mudanças na política econômica.

1. Porcentagem

Porcentagem é uma razão centesimal ou porcentual em que o denominador é igual a 100.

Exemplo: 25% (lê-se "vinte e cinco por cento"), que pode ser representado também por: $\frac{25}{100}$ ou 0,25.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Um colégio tem 2.000 alunos. Quantos por cento do total de alunos representa a 5ª série A, que tem 40 alunos?

Resolução:

Temos: $\frac{40}{2.000} = 0{,}02 = (0{,}02 \cdot 100)\% = 2\%$

Então, para determinar "quantos por cento" 40 representa de 2.000, basta *dividir* 40 por 2.000 e *multiplicar* o quociente obtido por 100.

Como *i* é a taxa porcentual, então: i = 2%

2. Em uma cidade, 30% da população são homens e 40% são mulheres. Sabendo-se que há 4.500 crianças, pergunta-se: qual a quantidade de homens e mulheres e qual a população da cidade?

Resolução:

30% são homens e 40% são mulheres

30% + 40% = 70%

Logo, as crianças (4.500) representam 30% da população (100% − 70%).

Como os homens também representam 30% da população, eles correspondem a 4.500 indivíduos

Somando-se o número de homens e crianças, estabelecemos a seguinte correspondência: 60% ⇔ 9.000

Pela regra de três, temos

60% ——————— 9.000

40% ——————— x

$60x = 9.000 \cdot 40 \Rightarrow x \frac{36.000}{60} \Rightarrow x =$ 6.000 mulheres

A população da cidade é dada pela soma de homens, mulheres e crianças, ou seja:

4.500 + 6.000 + 4.500 = 15.000 habitantes

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. (UFSC) Ao vestibular de 1982 da UFSC, inscreveram-se 15.325 candidatos, dos quais 14.099 concluíram todas as provas. Qual foi o percentual de abstenção?

2. (UFR-RJ) Das 100 pessoas que estão em uma sala, 99% são homens. Quantos homens devem sair para que a porcentagem dos homens na sala passe a ser 98%?

3. (UFSC) Se eu tivesse mais 20% da quantia que tenho, poderia pagar uma dívida de R$ 92,00 e ainda ficaria com R$ 8,80. Quanto possuo atualmente?

4. (UFAL) Um certo número de pessoas subiu em um ônibus no ponto inicial. Na primeira parada, desceram 25% daquele número e, em seguida, subiram 3 pessoas. Na segunda parada não subiu ninguém, mas desceram 25% do número de pessoas presentes, restando, então, 18 pessoas. Nestas condições, o número de pessoas que subiu no ponto inicial é:

a) 28 b) 25 c) 16 d) 14 e) 11

2. Lucro e prejuízo

Nas transações comerciais pode ocorrer lucro ou prejuízo.

Designando por V o preço de venda, C o preço de custo ou de compra, L o lucro e P o prejuízo, temos:

- para uma transação com lucro: $V = C + L$
- para uma transação com prejuízo: $V = C - P$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Um equipamento comprado por R$ 3.000,00 deverá ser vendido a que preço, para que proporcione o lucro de 25% sobre a venda?

Resolução:

Temos:

$C = R\$\ 3.000,00$

$L = 25\%$ de $C \Rightarrow L = 0,25 \cdot 3.000,00 \Rightarrow L = R\$\ 750,00$

Portanto, o equipamento deverá ser vendido por:

$V = C + L \Rightarrow V = 3.000,00 + 750,00 \Rightarrow V = R\$\ 3.750,00$

2. Mercedes vendeu uma bicicleta por R$ 300,00, tendo um lucro nessa transação de 30% sobre a venda. Quanto ela pagou pela bicicleta?

Resolução:

$V = R\$\ 300,00$

$L = 30\%$ de $V \Rightarrow L = 0,30 \cdot 300,00 \Rightarrow L = R\$\ 90,00$

Como $V = C + L$, então temos:

$300,00 = C + 90,00 \Rightarrow C = R\$\ 210,00$

Portanto, Mercedes pagou R$ 210,00 pela bicicleta, vendendo-a por R$ 300,00, tendo um lucro sobre a venda de R$ 90,00

3. Um comerciante vai vender seus produtos, que custaram R$ 500,00, com um prejuízo de 15% do preço de custo. Nestas condições, qual será o preço de venda de seus produtos?

Resolução:

Temos:

$C = 500,00$

$P = 15\%$ de $C \Rightarrow P = 0,15 \cdot 500,00 \Rightarrow P = R\$\ 75,00$

Como $V = C - P$, temos:

$V = 500,00 - 75,00 \Rightarrow V = R\$\ 425,00$

Portanto, o comerciante venderá seus produtos por R$ 425,00, com um prejuízo de R$ 75,00.

4. Vendi um aparelho eletrônico por R$ 300,00 com prejuízo de 25% do preço de custo. Quanto eu havia pago por ele?

Resolução:

Temos:

$V = 300,00$ e $P = 25\%$ de $C \Rightarrow P = 0,25 \cdot C$

Como: $V = C - P \Rightarrow 300,00 = C - 0,25 \cdot C \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,75 \cdot C = 300,00 \Rightarrow C = R\$\ 400,00$

Logo, eu paguei R$ 400,00 pelo aparelho eletrônico.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. 25% sobre o preço de custo de certa mercadoria a quantos por cento correspondem sobre a venda?
6. Natália quer vender um apartamento que custou R$ 160.000,00 lucrando 30% do preço de custo. Qual será o preço de venda do apartamento de Natália?
7. Luís comprou um carro por R$ 25.000,00 e vendeu-o por R$ 30.000,00. Calcule qual a porcentagem de lucro em relação ao:
   a) preço de custo; b) preço de venda.
8. Nilva vendeu seu terreno por R$ 30.000,00 com um prejuízo de 20% em relação ao preço de custo. Quanto ela havia pago pelo terreno?
9. (UFSC) Paguei, com multa, R$ 18.450,00 por uma prestação cujo valor era de R$ 15.000,00. Qual a taxa percentual da multa?
10. (UFBA) Um feirante comprou 300 kg de coco ao custo de R$ 0,30 o quilo, obtendo, com a venda, um lucro de R$ 6,18. Vendeu 115 kg com 34% de lucro e o restante, com prejuízo. Sabendo-se que os cocos restantes foram vendidos por x reais o quilo, calcule 100x.

3. Descontos e acréscimos

Quando um valor é aumentado, dizemos que sofreu um *acréscimo*; quando, em vez disso, sofre uma diminuição, trata-se de um *desconto*. Assim, para calcularmos acréscimos e descontos, fazemos uso de duas fórmulas denominadas, respectivamente, *fator de aumento* e *fator de desconto*.

- *fator de aumento*:

$\boxed{N = A \cdot (1 + i)}$, onde $\begin{cases} N \text{ é o valor com o acréscimo} \\ A \text{ é o valor do bem} \\ (1 + i) \text{ é o fator de aumento} \end{cases}$

- *fator de desconto*:

$\boxed{N = A \cdot (1 - i)}$, onde $\begin{cases} N \text{ é o valor com o desconto} \\ A \text{ é o valor do bem} \\ (1 - i) \text{ é o fator de desconto} \end{cases}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Um funcionário ganha, mensalmente, R$ 500,00. No próximo mês, esse funcionário receberá um reajuste salarial de 30% sobre seu salário atual. Calcule:

   a) o valor do novo salário; b) o valor do reajuste salarial.

Resolução:

Temos:

$A = 500$ e $i \cdot A = 30\%$ de A

a) N é o valor do novo salário, dado por:

$N = A \cdot (1 + i) \Rightarrow N = 500 \cdot (1 + 0{,}30) \Rightarrow$ N = R$ 650,00

O fator de aumento utilizado foi: 1,30

b) O valor do reajuste salarial é:

$i \cdot A = 30\%$ de $A = 0{,}30 \cdot 500 \Rightarrow$ R$ 150,00

2. Um funcionário ganha, por mês, R$ 500,00. Em cada mês, seu salário é descontado, em média 10% a título de previdência social e imposto sobre a renda. Qual é o valor do salário líquido desse funcionário? Qual o valor descontado mensalmente?

Resolução:

Temos: $A = 500$ e $i \cdot A = 10\%$ de $A = 0{,}10$ de A

Então: $N = A \cdot (1 - i) \Rightarrow N = 500 \cdot (1 - 0{,}10) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ N = R$ 450,00

$i \cdot A = 10\%$ de $A = 0{,}10 \cdot 500 =$ R$ 50,00

Portanto o valor líquido do salário deste funcionário é de R$ 450,00 e o desconto mensal, R$ 50,00.

3. O preço do produto de uma loja sofreu um desconto de 8% e ficou reduzido a R$ 115,00. Qual era o seu valor antes do desconto?

Resolução:

$N = 115$ e $i \cdot A = 8\%$ de $A = 0{,}08$ de A

Então: $N = A \cdot (1 - i) \Rightarrow$

$115 = A \cdot (1 - 0{,}08) \Rightarrow A =$ R$ 125,00

Logo, o preço antes do desconto era de R$ 125,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

11. Marli comprou uma guitarra importada com um desconto de 10% do preço tabelado. Se Marli pagou R$ 360,00 por essa mercadoria, qual era seu preço de tabela?

12. (Cesgranrio-RJ) Para comprar um tênis de R$ 70,00, Renato deu um cheque pré-datado de 30 dias no valor de R$ 74,20. A taxa de juros cobrada ao mês foi de:
    a) 0,6% b) 4,2% c) 6% d) 42% e) 60%

13. (UFRN) O preço de um compressor de tinta recebeu um aumento de 20%, passando a custar R$ 300,00. Se o aumento tivesse sido de apenas 10%, o compressor custaria:
    a) R$ 255,00 c) R$ 280,00 e) R$ 270,00
    b) R$ 275,00 d) R$ 264,00

14. (UFPA) Uma loja de departamento resolve fazer uma promoção, reduzindo os preços em 20%. Para que esses preços voltem a ser os mesmos praticados antes da promoção, o lojista deverá reajustá-los em:
    a) 20% b) 22,5% c) 22% d) 25% e) 19,5%

15. (UFPI) Paulo obteve um desconto de 10% na compra de um livro. Carla foi à loja e obteve um desconto de 10% sobre o preço pago por Paulo na compra do mesmo livro. Em relação ao preço original, o desconto que Carla obteve foi de:
    a) 18% b) 19% c) 20% d) 21% e) 100%

4. Acréscimos e descontos sucessivos

Acréscimos e descontos sucessivos, como diz o próprio nome, são valores que aumentam ou diminuem sucessivamente. Para entendermos melhor, observemos atentamente os exercícios resolvidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. O preço de um aparelho eletrônico era de R$ 1.000,00, mas sofreu acréscimos sucessivos de 20% e 30%. Quanto passou a custar esse aparelho eletrônico?

Resolução:

Temos:

$F_1 = 1 + 0{,}20 = 1{,}20$; $F_2 = 1 + 0{,}30 = 1{,}30$

Então:

$N = A \cdot (1 + i) \Rightarrow N = 1.000 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}30 \Rightarrow$ N = R$ 1.560,00

O aparelho eletrônico passou a custar R$ 1.560,00, e teve um aumento total de 56%

2. Um objeto de arte teve seu preço aumentado, sucessivamente, em 20% e 50%, passando a custar R$ 1.440,00. Qual era o preço desse objeto de arte antes desses aumentos?

Resolução:

Temos:

$F_1 = 1 + 0{,}20 = 1{,}20$; $F_2 = 1 + 0{,}50 = 1{,}50$

Então:

$N = A \cdot (1 + i) \Rightarrow$

$1.440 = A \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}50 \Rightarrow$ A = R$ 800,00

Logo, o preço praticado antes desses aumentos era de R$ 800,00.

3. Uma mercadoria de R$ 3.000,00 sofreu descontos sucessivos de 10%, 5% e 4%. A quanto ficou reduzido o preço dessa mercadoria e qual foi o valor do desconto?

Resolução:

Trata-se, agora, de desconto, então:

$F_1 = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$; $F_2 = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$;

$F_3 = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

Logo:

$N = A \cdot (1 - i) \Rightarrow N = 3.000 \cdot 0,90 \cdot 0,95 \cdot 0,96$

$N = 2.462,40$

Portanto, o novo preço da mercadoria é R$ 2.462,40. O valor do desconto é dado por:

$A - N = 3.000 - 2.462,40$

Assim, o valor do desconto foi de R$ 537,60.

4. Certo produto industrial que custava R$ 5.000,00 sofreu um acréscimo de 30% e, em seguida, um desconto de 20%. Qual o preço desse produto após esse acréscimo e desconto?

Resolução:

Temos acréscimo e desconto, então:

$F_1 = 1 + 0,30 = 1,30; F_2 = 1 - 0,20 = 0,80$

Logo:

$N = 3.000 \cdot 1,30 \cdot 0,80 \Rightarrow N = R\$\ 5.200,00$

O preço do produto, após o acréscimo e o desconto, ficou em R$ 5.200,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. (UFPB) A passagem aérea entre Rio–São Paulo custava, no mês de agosto, R$ 90,00; em setembro, houve um aumento de 20% e, em novembro, houve um outro aumento, de 25%. Qual o preço das passagens após esses aumentos?

a) R$ 120,00 c) R$ 130,00 e) R$ 140,00

b) R$ 125,00 d) R$ 135,00

17. (UFPE) O valor do dólar, em reais, subiu 10% em um trimestre e 22% no semestre seguinte. No intervalo desses dois períodos, o dólar subiu:

a) 32,2% b)32,0% c) 33,2% d) 34,2% e) 34,0%

18. Uma determinada marca de carro que custava R$ 20.000,00 sofreu descontos sucessivos de 10%, x% e 2% e ficou reduzida a R$ 16.758,00. Qual o valor da taxa x%?

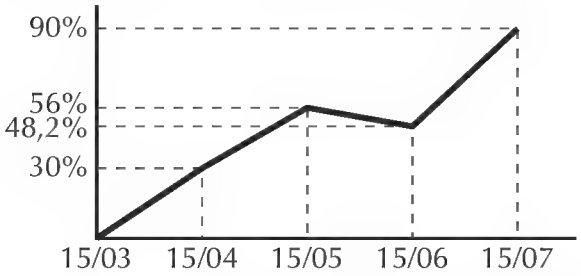
19. (UFG-GO) Uma certa mercadoria teve um aumento de 20% no preço e, em seguida, foi feito um desconto, também de 20%. O preço dessa mercadoria foi alterado? Justifique sua resposta.

20. (UFMG) Um comerciante aumenta o preço original x de certa mercadoria em 75%. Em seguida, anuncia essa mercadoria com um desconto de 50%, resultando em um preço final de R$ 2.100,00. O valor de x é:

    a) R$ 2.400,00 c) R$ 3.200,00 e) R$ 4.200,00
    b) R$ 2.600,00 d) R$ 4.000,00

21. (UFMG) O preço de um determinado produto foi reajustado da seguinte forma: de 15 de março a 15 de abril, sofreu um aumento de 30%; de 15 de março a 15 de maio, 56%; de 15 de março a 15 de junho, 48,2%; e de 15 de março a 15 de julho, 90%.

    Neste gráfico está representada essa situação:



O índice de reajuste do mês é a variação porcentual do preço entre o dia 15 do mês anterior e o dia 15 do mês em questão.

    a) Se o preço do produto em 15/4 era R$ 26,00. Calcule o preço em 15/3 e em 15/5.
    b) Determine o maior índice de reajuste mensal ocorrido no período de 15/3 a 15/7.
    c) Calcule o porcentual de redução do preço de 15/5 a 15/6.

5. Juro

Para definirmos as variáveis relacionadas aos juros, consideremos o seguinte exemplo:

Jarbas pede emprestado de Maria Ângela a quantia de R$ 60,00, para ser paga depois de três meses, comprometendo-se a pagar, naquela data, além dos R$ 60,00, a quantia de R$ 15,00.

Com base nesta situação, definimos:

- *juro*: é a quantia que se paga a título de compensação pelo uso do dinheiro emprestado. Assim, no exemplo, os juros serão os R$ 15,00 que Jarbas pagará a Maria Ângela ao final de três meses.
- *capital*: é o dinheiro sobre o qual recairão os juros. No exemplo, o capital é representado pelos R$ 60,00 que Jarbas toma emprestado a Maria Ângela.
- *taxa de juro*: é a razão entre o juro produzido e o capital empregado na unidade de tempo. A taxa de juro que Jarbas pagará a Maria Ângela ao fim de três meses será de 25%. A taxa de juro é dada pela fórmula:

$$i = \frac{j}{c}$$

onde *i* é a taxa de juro, *j* é o juro, *c* é o capital.

6. Unidade de tempo

Também conhecida como *período financeiro* ou *período de capitalização*, é o intervalo de tempo após o qual aplicam-se os juros sobre o capital inicial, somando-se os valores.

É preciso lembrar que os juros sempre são estabelecidos segundo um período de tempo e uma porcentagem. Assim, juros de 7% ao mês significam que, a cada mês, são aplicados juros de 7% sobre o valor anterior.

7. Montante

O *montante* (M) é o capital resultante da soma do capital inicial (c) e do juro aplicado (j) ao fim do período financeiro. Assim:

$$M = c + j$$

8. Juro simples

Chama-se operação financeira a *juro simples* aquela em que os juros são calculados apenas sobre o capital inicial para todo o número de períodos de capitalização.

Se um capital 100 produz juros *r* em um ano, então, um capital *c* produzirá juros *j* em *n* anos.

Capital ——— Período ——— Juros

100 ——————— 1(ano) ——————— r

c ——————————— n(anos) ——— j

Como o juro é diretamente proporcional ao capital e ao período, podemos escrever:

$$\frac{r}{j} = \frac{100}{c} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{r}{j} = \frac{100}{cn} \Rightarrow j \cdot 100 \Rightarrow rcn \Rightarrow j = \frac{rcn}{100} \quad (I)$$

A taxa de juro, dada pela fórmula $i = \frac{j}{c}$, tem os valores

$i = \frac{j}{c}$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$$j = c \cdot i \cdot n \quad (III)$$

Substituindo (III) na fórmula do montante, temos:

$M = c + j \Rightarrow M = c + c \cdot i \cdot n \Rightarrow \boxed{M = c \cdot (1 + i \cdot n)}$

Na matemática financeira, é importante que a taxa corresponda corretamente com o tempo, por isso não se esqueça:

- 1 ano = 12 meses → taxa anual;
- 1 mês comercial = 30 dias → taxa mensal;
- 1 ano comercial = 360 dias → taxa diária;

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Gilberto empregou seu capital de R$ 7.200,00 durante cinco anos a uma taxa de 40% ao ano. Calcule os juros produzidos, nestas condições, deste capital.

Resolução: c = 7.200; n = 5 anos; i = 40% a.a.

Temos: $j = c \cdot i \cdot n \Rightarrow j = 7.200 \cdot 0{,}40 \cdot 5 = 14.400$

Então, os juros produzidos foram de R$ 14.400,00.

2. Calcule o capital que, aplicado a 30% ao ano, durante dois anos, produziu os juros de R$ 12.000,00.

Resolução: i = 30% a.a.; n = 2 anos; j = 12.000

Temos: $j = c \cdot i \cdot n$

Como queremos o capital, vamos isolar *c*:

$$c = \frac{j}{i \cdot n} \Rightarrow c = \frac{12.000}{0{,}30 \cdot 2} = \frac{12.000}{0{,}6} \Rightarrow c = 20.000$$

O capital aplicado foi de R$ 20.000,00.

3. A que taxa mensal foi aplicado o capital de R$ 25.000,00, durante oito meses, produzindo juros de R$ 7.000,00?

Resolução: c = 25.000; n = 8 meses; j = 7.000

Logo: $j = c \cdot i \cdot n$

$$1 = \frac{j}{c \cdot n} \Rightarrow i = \frac{7.000}{25.000 \cdot 8} = \frac{7.000}{200.000} = 0{,}035$$

$$i = 3{,}5\%$$

4. Amélia aplicou seu capital de R$ 12.000,00 à taxa de 4,5% ao mês, durante duzentos dias. Quanto ela recebeu de juros?

Resolução: c = 12.000; i = 4,5% ao mês; n = 200 dias

A unidade de tempo da aplicação deve ser reduzida à mesma unidade de tempo da taxa, logo:

$$n = \frac{200}{30}$$

Assim: $j = c \cdot i \cdot n$

$$j = 12.000 \cdot 0{,}045 \cdot \frac{200}{30} \Rightarrow j = \frac{108.000}{30} \Rightarrow j = 3.600$$

Portanto, Amélia recebeu R$ 3.600,00 de juros.

5. Vanderlei fez uma aplicação de R$ 40.000,00 à taxa de 38% ao ano, durante 2 anos, 5 meses e 12 dias. Quanto recebeu de juros com essa aplicação?

Resolução:

Temos: $c = 40.000$; $i = 38\%$ a.a.; $n = 2$ anos, 5 meses e 12 dias

A unidade de tempo da aplicação deve ser reduzida à mesma unidade de tempo da taxa, assim:

$$5 \text{ meses} = \frac{5}{12}; \; 12 \text{ dias} = \frac{12}{360} = \frac{1}{30}$$

$$\text{Somando-se: } 2 + \frac{5}{12} + \frac{1}{30} = \frac{120 + 25 + 2}{60} = \frac{147}{60}$$

Logo: $j = c \cdot i \cdot n$

$$j = 40.000 \cdot 0{,}38 \cdot \frac{147}{60} = \frac{2.234.400}{60} = 37.240$$

Portanto, Vanderlei recebeu R$ 37.240,00 de juros com essa aplicação.

6. Conceição aplicou um certo capital durante 75 dias à taxa de 9% ao mês, recebendo R$ 90,00 de juros. Qual o montante dessa aplicação?

Resolução:

$i = 9\%$ a.m.; $j = 90$; $n = 75$ dias

Temos:

$n = 75$ dias $= 2$ meses e 15 dias, portanto, a unidade de tempo será: $n = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$

Substituindo os valores na fórmula: $j = c \cdot i \cdot n$

$$c = \frac{90}{0{,}09 \cdot \frac{5}{2}} = 400$$

Como $M = c + j \Rightarrow M = 400 + 90 \Rightarrow M = 490$

Então, o montante dessa aplicação foi de R$ 490,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

22. (UFSC) Certo negociante pagou R$ 560,00 pelo empréstimo da quantia de R$ 500,00, durante um mês. Qual a taxa percentual de juros por mês?

23. (FMU-SP) O valor do capital, para que os juros simples a uma taxa de 18% ao ano, durante 8 meses, sejam de R$ 576,00 é igual a:

a) R$ 4.800,00
b) R$ 7.200,00
c) R$ 8.400,00
d) R$ 9.600,00

24. Benedita empregou o capital de R$ 9.000,00 à taxa de 8% ao ano. No fim de certo tempo, ela retirou capital e juros no valor de R$ 10.080,00. Calcule o tempo da aplicação.

25. José aplicou seu capital de R$ 180.000,00 a juros simples, durante um ano, um mês e 10 dias, obtendo dessa aplicação R$ 48.000,00 de juros. A que taxa mensal esteve aplicado o capital de José?

26. Em quantos meses o capital de R$ 37.000,00, aplicado à taxa de 1,8% ao ano, renderia juros para formar um montante de R$ 38.110,00?

9. Juro composto

Chamamos *juro composto* à modalidade de transação em que, a cada período, os juros produzidos são aplicados sobre o capital do período anterior. Sendo assim, temos:

$$M = c \cdot (1 + i)^n \text{ em que:}$$

M é o montante; *c* é o capital; *i* é a taxa de juro composto; *n* é o número de períodos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ricardo aplicou R$ 15.000,00 a juros compostos de 8% ao mês. Que quantia terá após seis meses de aplicação?

Resolução:

Temos: $M = c \cdot (1 + i)^n$

$$M = 15.000 \cdot (1 + 0{,}08)^6 \Rightarrow M = 23.803{,}11$$

Logo, Ricardo terá a quantia de R$ 23.803,11 após seis meses.

2. Qual o capital que, investido a juro composto de 4% ao mês, gera um montante de R$ 6.749,18 durante o período de três meses de aplicação?

Resolução:

Temos: $M = 6.749{,}18$; $i = 4\%$ a.m.; $n = 3$ meses.

Então: $M = c \cdot (1 + i)^n$

$$6.749{,}18 = c \cdot (1 + 0{,}04)^3 \Rightarrow c = \frac{6.749{,}18}{1{,}124864} \Rightarrow c \cong 6.000$$

O capital inicial foi de, aproximadamente, R$ 6.000,00.

3. Mônica recebeu um montante de R$ 130.480,00 por investir seu capital de R$ 80.000,00 a juros compostos de 13% ao mês. Determine quanto tempo seu capital ficou investido. (Dados: $\log 1{,}631 \simeq 0{,}212$ e $\log 1{,}13 \simeq 0{,}053$.)

Resolução:

Temos: $c = 80.000$; $M = 130.480$; $i = 13\%$ a.m.

Assim: $M = c \cdot (1 + i)^n$

$$130.480 = 80.000 \cdot (1 + 0{,}13)^n \Rightarrow (1{,}13)^n = 1{,}631$$

Para determinar o valor de n, aplicamos logaritmo aos dois termos da equação:

$$\log (1{,}13)^n = \log 1{,}631 \Rightarrow n \cdot \log 1{,}13 = \log 1{,}631 \Rightarrow$$

$$n \cdot (0{,}053) = 0{,}212 \Rightarrow n = \frac{0{,}212}{0{,}053} \Rightarrow n = 4$$

Logo, Mônica deixou seu capital investido durante quatro meses.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27. (UFMG) Por um empréstimo de R$ 80.000,00 à taxa de 1% ao mês. José pagou de uma única vez, após dois meses, o montante de R$ 115.200,00. Por terem sidos aplicados juros compostos, a taxa mensal foi de:

    a) 15% b) 20% c) 22% d) 24% e) 26%

28. (UFRR) Suponha que um assalariado ganhe R$ 500,00 mensalmente, com reajuste de 65% anual, e pague uma prestação de R$ 125,00 mensais, com reajuste anual de 117,8%. Supondo fixos esses reajustes, em quanto tempo, aproximadamente, o seu vencimento terá um valor exatamente igual ao da prestação? (Dados: log 4 = 0,60 e log 1,32 = 0,12.)

29. Guilhermina aplicou R$ 3.000,00 a juros compostos de 7% ao mês. Que quantia terá após cinco meses de aplicação?

10. Aplicação ou capital à taxa variável

Quando um investimento (capital) tiver aumentos sucessivos com taxas não-constantes, o montante será dado pelo produto desse capital pelos fatores de aumento.

Assim, temos:

$$M = c \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

A um capital de R$ 5.000,00 foram aplicadas as seguintes taxas de juros compostos: 8% no primeiro mês, 10% no segundo mês e 15% no terceiro mês. Determine o montante após esses três meses. Calcule a taxa única que equivale a esses três aumentos.

Resolução:

Temos: $i_1 = 8\%$; $i_2 = 10\%$; $i_3 = 15\%$

$M = c \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3)$

$M = 5.000 \cdot (1 + 0,08) \cdot (1 + 0,10) \cdot (1 + 0,15)$

$M = 5.000 \cdot (1{,}08) \cdot (1{,}10) \cdot (1{,}15)$

$M = 6.831$

Logo, o montante é de R$ 6.831,00.

Cálculo da taxa única:

$$i_{ÚNICA} = \frac{\text{juros (j)}}{\text{capital (c)}}$$

$j = M - c \Rightarrow j = 6.831 - 5.000 \Rightarrow j = 1.831 \Rightarrow$

$$i_{ÚNICA} = \frac{1.831}{5.000} \Rightarrow i_{ÚNICA} = 0{,}3662 \Rightarrow i_{ÚNICA} = 36{,}62\%$$

11. Inflação

Dizemos que há *inflação* quando os preços de bens e serviços sofrem aumento. Quando sofrem diminuição, dizemos que houve *deflação*.

Para resolvermos problemas que envolvem inflação, utilizamos o mesmo raciocínio usado para solucionar problemas de aumentos sucessivos e juros compostos, isto é, multiplicamos o valor do bem pelos fatores de aumento.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Qual deve ser a correção de um salário de R$ 700,00 dentro de um período em que a inflação atingiu 30%?

Resolução:

$N = A \cdot (1 + i) \Rightarrow N = 700 \cdot (1 + 0{,}30) \Rightarrow$

$\Rightarrow N = 700 \cdot 1{,}30 \Rightarrow N = 910$

Portanto, o salário passaria a ser R$ 910,00.

A correção seria de R$ 210,00.

2. Em um certo país, as taxas mensais de inflação foram de 20% e 30%. Determine a taxa de inflação acumulada nesse bimestre.

Resolução:

Supondo um valor de cem unidades monetárias, anteriores a esses dois aumentos, para reajustar esse valor, temos:

$N = 100 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}30 = 156$

De onde se conclui que o aumento inflacionário foi de 56; portanto, a taxa de inflação correspondente a esses dois aumentos foi de:

$$i = \frac{56}{100} = 0{,}56 \Rightarrow i = 56\%$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

30. (Ufes) Os índices de inflação dos três primeiros meses de um determinado ano foram iguais a 10%, 20% e 30%.

a) Qual o índice de inflação acumulado no trimestre.

b) Se uma determinada categoria reivindica reajuste trimestral igual à inflação do período e obtém 60% ao final do trimestre citado, que índice de reajuste sobre o novo salário obtido deve ser concedido para se cobrir a perda salarial decorrente?

31. (UFG-GO) Uma loja vende suas mercadorias à vista com 30% de desconto ou em dois pagamentos mensais iguais, sem entrada e sem juros. Suponha que a inflação nos próximos meses seja de 20% e que o comprador possa comprar uma mercadoria em qualquer um dos planos. Qual ele deverá escolher?

32. (UFMG) Um consumidor foi comprar um produto e o vendedor lhe deu duas opções:

1ª – pagar à vista com 15% de desconto;

2ª – pagar o preço do produto em três parcelas iguais, sendo a primeira no ato da compra, a segunda em 30 dias e a terceira em 60 dias.

Sabendo-se que todo o dinheiro disponível do consumidor está aplicado no mercado financeiro e rende 30% ao mês, qual das duas opções é a mais vantajosa para o mesmo?

33. (UFR-RJ) Um eletrodoméstico custa R$ 25,00 à vista, mas pode também ser pago em duas vezes: R$ 15,00 de entrada e R$ 15,00 ao fim de 30 dias. Qual é o juro mensal que a loja está cobrando do cliente que paga em duas vezes?

34. (UFMG) Uma loja oferece duas formas de pagamento a seus clientes: à vista, com 10% de desconto sobre o preço anunciado, ou dividido em duas parcelas iguais: a primeira no ato da compra e a segunda no trigésimo dia após a compra.

    A taxa mensal de juros efetivamente cobrada, no pagamento parcelado, é de:

    a) 10% b) 15% c) 25% d) 30% e) 50%

35. (Enem-MEC) No quadro a seguir estão as contas de luz e água de uma mesma residência. Além do valor a pagar, cada conta mostra como calculá-lo, em função do cosumo de água (em m^3) e de eletricidade (em kwh). Observe que, na conta de luz, o valor a pagar é igual ao consumo multiplicado por um certo fator. Já na conta de água, existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de Eletricidade	
Fornecimento:	**Valor em R$**
401 kwh x 0,13276000	53,23

Companhia de Saneamento
Tarifas de água / m^3

Faixas de consumo	**Tarifa**	**Consumo**	**Valor em R$**
até 10	5,50	tarifa mínima	5,50
11 a 20	0,85	7	5,95
21 a 30	2,13		
31 a 50	2,13		
acima de 50	2,36		
		Total	11,45

Suponha que, no próximo mês, dobre o consumo de energia elétrica dessa residência. O novo valor da conta será de:

a) R$ 55,23 b) R$ 106,46 c) R$ 802,00 d) R$ 100,00 e) R$ 22,90

36. (Enem-MEC) Suponha agora, com base nas informações do exercício 32, que dobre o consumo de água. O novo valor da conta será de:

    a) R$ 22,90 c) R$ 43,82 e) R$ 22,52 b) R$ 106,46 d) R$ 17,40

Capítulo 13

Números Complexos

Quando alguma equação exige uma raiz quadrada de um número negativo, a solução é impossível dentro do conjunto dos números reais (ℝ). Por isso, os matemáticos idealizaram um número imaginário (i). A partir deste, surgiram novos números, constituindo o *conjunto dos números complexos* (ℂ).

1. Definição

Dada uma equação:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

Para que equações como essa tivessem solução, os matemáticos ampliaram o campo dos números, criando um novo número, não-real, chamado de *unidade imaginária* (*i*).

Onde $i = \sqrt{-1}$

E esse número, elevado ao quadrado: $i^2 = -1$

Assim, todas as raízes quadradas de números negativos podem ser escritas a partir de i:

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2 \cdot (-1)} = \pm\sqrt{2}\,i$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot (-1)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \pm\sqrt{3}\,i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$$

2. Conjunto dos números complexos

Com a criação da unidade imaginária (i), surgiram novos números, formando um novo conjunto numérico. A este conjunto chamamos *conjunto dos números complexos*, denotado por $\mathbb{C}$.

Os números complexos apresentam a forma genérica $z = a + bi$, onde a e b são números reais. Assim, podemos definir o conjunto $\mathbb{C}$ como:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi,\ a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}\},$$
onde z é o número complexo.

3. O número complexo

Sendo $z = a + bi$ um número complexo, temos:

- $a + bi$ é chamada de forma algébrica;
- a é denominada a parte real de z, onde $a \in \mathbb{R}$, $a = \text{Re}(z)$;
- b é denominada a parte imaginária de z, onde $b \in \mathbb{R}$, $b = \text{Im}(z)$;
- i é a unidade imaginária, $i = \sqrt{-1}$.

4. Casos especiais

Tomemos o número complexo em sua forma genérica:

$$z = a + bi$$

- Quando $b = 0$, então o número $z = a + bi$ é um número real, pois $z = a + 0i \Rightarrow z = a$.

Isso significa que todo número real é também um número complexo; portanto, podemos afirmar que:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Recordando:

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

Finalmente, podemos escrever: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- Quando $b \neq 0$, então o número $z = a + bi$ é dito um número imaginário. Exemplo: $-3 + 5i$
- Quando $a = 0$ e $b \neq 0$, então o número $z = a + bi$ é denominado imaginário puro, ou seja $z = 0 + bi \Rightarrow z = bi$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Ache as raízes das equações:

a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$

Resolução:

a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ é uma equação do 2º grau, então:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13$

$\Delta = 16 - 52 \Rightarrow = -36 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm 6i}{2} = \dfrac{\cancel{2}(2 \pm 3i)}{\cancel{2}} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 + 3i \\ x'' = 2 - 3i \end{cases}$ ou

$S = \{2 + 3i; 2 - 3i\}$

b) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow$

$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} x' = 2i \text{ ou} \\ x'' = -2i \end{cases}$ $S = \{2i; -2i\}$

2. Calcule:

a) $(-3i)^2$ b) $(5 + i)^2$

Resolução:

a) $(-3i)^2 = (-3)^2 \cdot i^2 = 9 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 = 9 \cdot (-1) = -9$

b) $(5 + i)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot i + i^2 = 25 + 10i + (-1) = 24 + 10i$

3. Escreva os números na forma algébrica:

a) $-7i$ b) -1 c) $4i$ d) $-\sqrt{2}$

Resolução:

a) $-7i = 0 - 7i$ c) $4i = 0 + 4i$

b) $-1 = -1 + 0i$ d) $-\sqrt{2} = -\sqrt{2} + 0i$

4. Determine Re(z) e Im(z) nos seguintes números complexos:

a) $z = 7 - 2i$ c) $z = 3 + i$ e) $z = \frac{2}{3}$

b) $z = -i$ d) $z = -\sqrt{2} + 3i$

Resolução:

a) $z = 7 - 2i \Rightarrow Re(z) = 7$ e $Im(z) = -2$

b) $z = -i \Rightarrow Re(z) = 0$ e $Im(z) = -1$

c) $z = 3 + i \Rightarrow Re(z) = 3$ e $Im(z) = 1$

d) $z = -\sqrt{2} + 3i \Rightarrow Re(z) = -\sqrt{2}$ e $Im(z) = 3$

e) $z = \frac{2}{3} \Rightarrow Re(z) = \frac{2}{3}$ e $Im(z) = 0$

5. Classifique os números complexos do exercício anterior em: real, imaginário ou imaginário puro.

Resolução:

a) $z = 7 - 2i \Rightarrow$ imaginário d) $z = -\sqrt{2} + 3i \Rightarrow$ imaginário

b) $z = -i \Rightarrow$ imaginário puro e) $z = \frac{2}{3} \Rightarrow$ real

c) $z = 3 + i \Rightarrow$ imaginário

6. Determine o valor de x para que os números complexos abaixo sejam imaginários puros:

a) $z = (x - 9) + 2i$ b) $w = (x - 1)^2 - 3i$

Resolução:

Para que sejam imaginários puros, devemos ter a parte real igual a zero, então:

a) $Re(z) = 0 \Rightarrow x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 9}$

b) $Re(w) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

7. Calcule o valor de *a* para que o número complexo abaixo seja um número real:

   $z = 1 + (a - 2)i$

Resolução:

Devemos ter $Im(z) = 0$, portanto: $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine as raízes das equações abaixo no conjunto dos números complexos:

   a) $2x^2 + 10 = 0$ c) $x^2 - 4x + 5 = 0$

   b) $x^2 + 4x + 8 = 0$

2. Calcule:

   a) $(-7i)^2$ b) $(3i)^2$ c) $(1 - i)^2$ d) $\left(\frac{2}{3} + 3i\right)^2$

3. Escrever os números abaixo na forma algébrica:

   a) 3,5 b) $-2i$ c) -10 d) $6i$ e) $\sqrt{-100}$

4. Determine Re(z) e Im(z) dos seguintes números complexos:

   a) $z = 5 - 3i$ b) $z = i$ c) $z = 5 + 2i$ d) $z = \sqrt{3}$

5. Classifique os números complexos do exercício anterior em: real, imaginário ou imaginário puro.

6. Determine o valor de *x* para que os números complexos a seguir sejam imaginários puros:

   a) $z = (x + 7) - 3i$ b) $w = (x - 3)^2 + 5i$

7. Calcule o valor de *y* para que o número complexo que segue seja um número real: $z = 3 + (y - 5)i$

8. (UFSC) Seja o complexo $z = i - 1$.
   Qual o valor de $f(z) = 2z^2 + 4z + 5$?

9. (UFPA) O número complexo $z = x + (x^2 - 4)i$ é real se, e somente se:

   a) $x = 0$ c) $x = \pm 2$ e) $x \neq 0$ e $x \neq \pm 2$

   b) $x \neq 0$ d) $x \neq \pm 2$

5. As potências de *i*

Se realizarmos cálculos sucessivos, poderemos observar que as potências de *i* vão-se repetindo de quatro em quatro unidades, na seguinte seqüência: 1, i, −1, −i.

Assim:

$i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4n} = 1$

$i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4n+1} = i$

$i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4n+2} = -1$

$i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4n+3} = -i$

Logo, para calcularmos o resultado de i^n, $n \in \mathbb{N}$, basta dividir o expoente por 4 e considerar o valor do resto dessa divisão, dado pela tabela a seguir:

resto	i^n	resultado da potência
0	i^0	1
1	i^1	i
2	i^2	−1
3	i^3	−i
⋮	⋮	⋮

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule:

a) $i^{1.000}$ b) i^{235} c) $i^9 - i^{20} + i^{16} - i^{134}$

Resolução:

a) $i^{1.000}$

Dividindo-se 1.000 por 4,
encontramos resto igual a zero, portanto:
$i^{1.000} = i^0 = 1$

b) i^{235}

Dividindo-se 235 por 4, encontramos resto igual a 3, logo:

$i^{235} = i^3 = -i$

c) $i^9 - i^{20} + i^{16} - i^{134}$

Dividindo-se os expoentes por 4, temos restos, respectivamente: 1, 0, 0 e 2. Logo:

$i - 1 + 1 - (-1) = i + 1$

2. Determine a soma $S = i + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{306}$

Resolução:

Sabemos que: $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$ e que esses valores se repetem periodicamente.

Como $i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$, temos:

$$S = \underbrace{i + i^2 + i^3 + i^4}_{0} + \underbrace{i^5 + ... + i^8}_{0} + \underbrace{i^9 + ... + i^{12}}_{0} + ... + i^{306}$$

Então, o problema se resume em encontrar o resto da divisão de 306 por 4, pois a soma das potências cujos expoentes são múltiplos de 4 é zero.

Logo:

306	4
26	76
(2)	

$S = i^{306} = i^2 = -1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. Calcule:

a) i^{59} b) i^{25} c) i^{520} d) $i^{1.402}$

11. Calcule o valor da expressão:

$i^{47} + i^{12} - i^4 - i^{22}$

12. (Ufes) Se $w = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, onde $i^2 = -1$, então o número de elementos distintos do conjunto $\{w, w^2, w^3, ..., w^n, ...\}$ é:
a) 4 b) 8 c) 10 d) 12 e) infinito

13. (Mackenzie-SP) O valor da expressão:
$y = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + ... + i^{1.001}$ é:
a) 1 b) i c) $-i$ d) -1 e) $1 + i$

6. Igualdade de números complexos

Uma diferença importante entre números complexos e números reais é que os números complexos não são comparáveis, isto é, não é definida, para o campo dos números complexos, a *relação de ordem*. Assim, *não* existe um complexo *maior* ou *menor* do que outro.

Podemos, no entanto, classificá-los em *iguais* ou *diferentes*.

Assim, dados dois números complexos: $z = a + bi$ e $w = c + di$, com a, b, c e d reais, temos que z e w são iguais quando suas partes reais e imaginárias são iguais, ou seja:

$$z = w \Rightarrow a + bi = c + \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcular o valor de a e b tal que os números complexos $z = a + bi$ e $w = -3 + 5i$ sejam iguais.

Resolução:

Se $z = w$, então $a + bi = -3 + 5i$. Portanto $a = -3$ e $b = 5$

2. Determine a e b na igualdade abaixo:
$(a - 2) + (b + 3)i = 4 + 7i$

Resolução:

Pela igualdade, podemos escrever:

$$\left.\begin{array}{l} a - 2 = 4 \Rightarrow a = 6 \\ b + 3 = 7 \Rightarrow b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 6 \text{ e } b = 4$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

14. Seja o complexo $z = (3a + b) + (a + 2b)i$. Calcule os valores reais de a e b de modo que:

a) $z = -2 + 6i$ b) $z = 15i$ c) $z = 5$

7. Conjugado de um número complexo

Definimos como complexo conjugado de $z = a + bi$ o número complexo $\bar{z} = \overline{a + bi}$. Assim:

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

É interessante observar que, multiplicando-se um número complexo pelo seu conjugado, teremos partes reais iguais, mas partes imaginárias simétricas.

$z = a + bi \Rightarrow = \bar{z} = a - bi$

$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2i^2$, mas $i^2 = -1$, então:

$z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2(-1) \Rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Observe que o produto $z \cdot \bar{z}$ é a soma dos quadrados de dois números reais (*a* e *b*); portanto, o produto $z \cdot \bar{z}$ é um número real e recebe a denominação de *norma de z*.

$$N(z) = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Seja $z = 3 + 4i$. Obtenha $\bar{z}$.

Resolução: $\bar{z} = \overline{3 + 4i} \Rightarrow \bar{z} = 3 - 4i$

2. Seja $w = 2 - 7i$. Obtenha $\overline{w}$.

Resolução: $\overline{w} = \overline{2 - 7i} \Rightarrow \overline{w} = 2 + 7i$

EXERCÍCIO PROPOSTO

15. Obtenha o conjugado dos complexos a seguir:

a) $z = i$

b) $z = 1 - 2i$

c) $z = (1 + i) \cdot (2 - i)$

d) $z = (2 + 3i) - (4 - i)$

8. Operações com números complexos

As operações com números complexos são feitas de forma análoga aos números reais ou com expressões do tipo $a + bx$.

8.1 Adição

Para somarmos dois ou mais números complexos, basta somarmos suas partes reais e imaginárias separadamente. Exemplo:

$z = a + bi$ e $w = c + di \Rightarrow \boxed{z + w = (a + c) + (b + d)i}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sendo $z = 3 + 2i$ e $w = -5 + 4i$, efetue $z + w$.

Resolução: $z + w = (3 + 2i) + (-5 + 4i)$

8.2 Subtração

O processo de subtração de números complexos é análogo à soma; portanto:

$z = a + bi$ e $w = c + di \Rightarrow \boxed{z - w = (a - c) + (b - d)i}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sendo $z = 9 - i$ e $w = -3 + 8i$, calcule $z - w$.

Resolução:

$$z - w = (9 - i) - (-3 + 8i) = [9 - (-3)] + (-1 - 8)i =$$
$$12 - 9i$$

8.3 Multiplicação

Usaremos a regra da multiplicação de binômios para multiplicar dois números complexos, lembrando que $i^2 = -1$.

Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$ dois números complexos, temos que:

$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bd\ -1$

$$\boxed{z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Dados $z = 3 + 4i$ e $w = 2 + 5i$, efetue $z \cdot w$.

Resolução:

$z \cdot w = (3 + 4i) \cdot (2 + 5i) = 6 + 15i + 8i + 20i^2$

$z \cdot w = 6 + 23i - 20 \Rightarrow z \cdot w = -14 + 23i$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. Dados $z = 2 - 3i$ e $w = -3 + 5i$, obtenha:

a) $z + w$ c) $w - z$ e) z^2

b) $z - w$ d) $z \cdot w$ f) w^2

17. (UF-Pelotas) A equação do 2º grau cujas raízes são os números complexos i e $1 - i$ é:

a) $x^2 - x + 1 + i = 0$ d) $x^2 + x - 1 + i = 0$

b) $x^2 + x + 1 + i = 0$ e) $x^2 - x + 1 - i = 0$

c) $x^2 - x - 1 + i = 0$

18. (Cescem-SP) O produto $(5 + 7i) \cdot (3 - 2i)$ vale:

a) $1 + 11i$ c) $29 + 11i$ e) $29 + 31i$

b) $1 + 31i$ d) $29 - 11i$

19. (UFG-GO) O valor de x para o qual o produto $(4 + 2i) \cdot (x - 8i)$ é um número real é:

a) 32 b) 16 c) 8 d) 4 e) 2

8.4 Divisão

A divisão de dois números complexos z por w, com $w \neq 0$, é obtida utilizando-se a representação fracionária e, em seguida, racionalizando essa fração, utilizando o conceito de conjugado de w.

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sejam: $z = 4 + 5i$ e $w = 2 + 3i$. Calcule $\frac{z}{w}$.

Resolução:

Temos:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} \Rightarrow \frac{4 + 5i}{2 + 3i} = \frac{(4 + 5i) \cdot (2 - 3i)}{(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)} =$$

$$= \frac{8 - 12i + 10i - 15i^2}{2^2 - 3^2 i^2} = \frac{8 - 12i + 10i + 15}{4 - 9i^2} =$$

$$= \frac{23 - 2i}{4 + 9} = \frac{23 - 2i}{13} \Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{23}{13} - \frac{2i}{13}$$

9. Equações do 1º e 2º graus em $\mathbb{C}$

Resolvemos as equações em $\mathbb{C}$ de maneira análoga a em $\mathbb{R}$. Observe os exercícios resolvidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$:

   a) $5 + i + 2z = 3i + z$

   b) $i \cdot z = 1$

   c) $(3 - 2i) \cdot z = 13$

   d) $z^2 + 2z + 10 = 0$

Resolução:

a) $5 + i + 2z = 3i + z \Rightarrow z = 2i - 5 \Rightarrow S = \{2i - 5\}$

b) $i \cdot z = 1$

$$z = \frac{1}{i} \Rightarrow z = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} - \frac{-i}{i}$$

$z = -i$ ou $z = 0 - i \Rightarrow S = \{-i\}$

c) $(3 - 2i) \cdot z = 13$

$$z = \frac{13}{3 - 2i} \Rightarrow z = \frac{13 \cdot (3 + 2i)}{(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)} =$$

$$\frac{39 + 26i}{9 + 4} \; 3 + 2i \Rightarrow S = \{3 + 2i\}$$

d) Embora $z^2 + 2z + 10 = 0$ seja uma equação com números complexos, é uma equação do 2º grau e, portanto, utilizamos a fórmula de Bhaskara:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} =$$

$$z = \frac{-2 \pm 6i}{2} \Rightarrow \begin{cases} z' = -1 + 3i \\ z'' = -1 - 3i \end{cases} \text{ ou } \Rightarrow S = \{-1 + 3i; -1 - 3i\}$$

2. Dado $z = 1 - 2i$, ache o inverso de z.

Resolução:

O inverso de z é dado por $z^{-1} = \frac{1}{z}$

Logo: $z^{-1} = \frac{1}{1 - 2i} = \frac{1 \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{1 + 2i}{1^2 - 2^2 i^2}$

$$z^{-1} = \frac{1 + 2i}{1 + 4} = \frac{1 + 2i}{5} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{5} = \frac{2i}{5}$$

3. Determine z de modo que: $2z + \bar{z} = 2 + 5i$.

Resolução:

Consideremos $z = a + bi$ e façamos a substituição na equação:

$2 \cdot (a + bi) + (a - bi) = 2 + 5i \Rightarrow$

$2a + 2bi + a - bi = 2 + 5i$

Logo: $3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow b = 5 \Rightarrow$

$z = \frac{2}{3} + 5i \Rightarrow S = \left\{\frac{2}{3} + 5i\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

20. Resolva, no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, as equações abaixo:

a) $3z - 2i + 1 = 2z + i$

b) $(2 - 2i) \cdot z = 8$

c) $z^2 - iz + 2 = 0$

21. (UFRS) A soma das partes real e imaginária de $\frac{i}{1 - \frac{i}{1+i}}$ é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

22. (UFMS) Determine $x \in \mathbb{R}$, tal que o quociente $\frac{5 + (x - 8)i}{5 - i}$ seja também um número real.

23. (UFPA) O conjugado do quadrado do número complexo $z = \frac{2 + 3i}{-5 - i}$ é:

a) i b) $-i$ c) $\frac{i}{2}$ d) $-\frac{i}{2}$ e) $\frac{1-i}{2}$

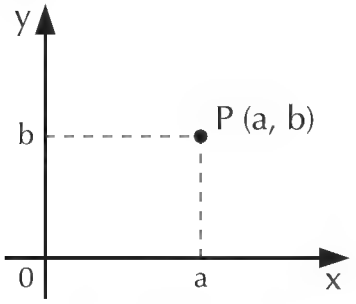
24. (UFPA) Se $x = 1 - ai$ e $\overline{y} = 2 - 3i$, o valor de a, para que $\frac{\overline{x}}{y}$ seja um número real, é:

a) 0 b) $\frac{1}{13}$ c) $\frac{5}{13}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

10. Representação gráfica – plano de Argand-Gauss

Quando representamos um número complexo z por meio de um par ordenado (a, b) no plano cartesiano, esse plano passa a ser chamado de plano de "Argand-Gauss", devido aos estudos feitos nesta área pelos matemáticos Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Assim, z = a + bi está associado ao ponto P(a, b); sendo a representação da parte real de z: Re(z) no eixo das abscissas e a parte imaginária de z: Im(z) no eixo das ordenadas, temos:



em que: o eixo x é o eixo real;

o eixo y é o eixo imaginário;

xOy é o plano de Argand-Gauss;

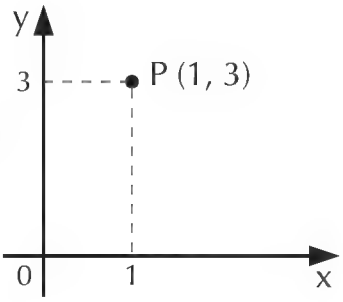
P é a imagem de z, também chamado de afixo de z.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Represente o número complexo z = 1 + 3i no plano de Argand-Gauss.

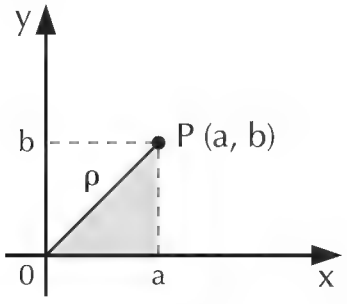
Resolução:

z = 1 + 3i pode ser representado pelo par (1, 3) ao qual associaremos o ponto P(1, 3), chamado de afixo de z.



11. Módulo de um número complexo

Consideremos o complexo z = a + bi, representado pelo ponto P(a, b), indicado no gráfico abaixo:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, temos:

$\rho^2 = a^2 + b^2$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

Portanto, podemos concluir que o módulo de z é a distância p de P à origem dos eixos. O módulo de z é indicado por |z|, |a+ bi| ou p.

$$|z| = |a+ bi| = \boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

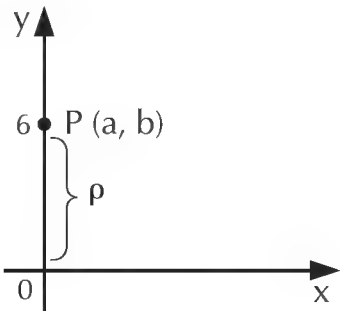
EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcular os módulos dos complexos abaixo e faça suas representações geométricas no plano de Argand-Gauss.

   a) $z = 6i$ b) $z = 4$ c) $z = -3i$ d) $z = 12 - 5i$

Resolução:

a) $z = 6i$, logo: $a = 0; b = 6 \Rightarrow P(0, 6)$

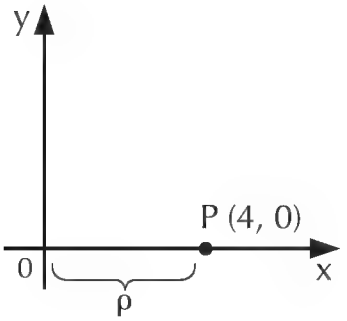


Então: $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\rho = \sqrt{0^2 + 6^2} = \sqrt{36}$

$\rho = 6$

b) $z = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases}$

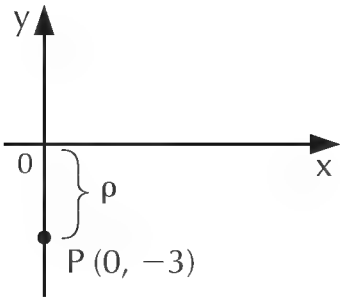


$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\rho = \sqrt{16}$

$\rho = 4$

c) $z = -3i \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}$

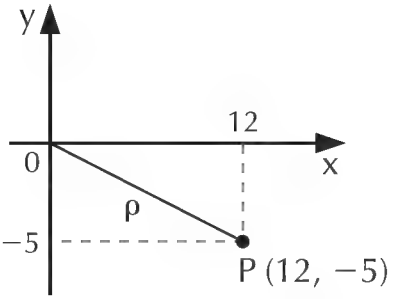


$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\rho = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9}$

ρ 3

d) $z = 12 - 5i \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = -5 \end{cases}$



$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\rho = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169}$

$\rho = 13$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

25. Determine o módulo dos números complexos abaixo e faça a representação geométrica dos mesmos.

a) $z = 4 - i$ c) $z = -3$ e) $z = 1 + \sqrt{3}\,i$

b) $z = \sqrt{2} + i$ d) $z = 11i$

26. (UFSC) Dado o complexo $z = a + bi$. A soma de z com o seu conjugado é 18 e o produto de ambos é 145. Determine o módulo de $a \cdot b$.

27. (UFPA) Se $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ 2-3i & 2+3i \end{bmatrix}$, então $|\det A|$ é:

a) 64 b) $\sqrt{50}$ c) 36 d) 13 e) 8

28. (UFSC) Dado:

$$z = (2 + i) \cdot \left[\frac{6 + \sqrt{123}}{10} + \left(\frac{2\sqrt{123} - 3}{10} \right) i \right],$$

determine o valor numérico de $|z|^2$.

29. (UFSC) Se $z = \dfrac{(10 - i) \cdot i^3 + i^{50}}{(1 - i)^2}$, determine $|z|^2$.

30. (UFSC) Dado $z = -1 + i\sqrt{3}$, determine a soma dos números associados à(s) afirmação(ões) verdadeira(s):

01. O conjugado de z é $\bar{z} = -1 - i\sqrt{3}$.

02. O quadrado de z é $z^2 = 2(1 - \sqrt{3}\,i)$.

04. O oposto de z é $-z = 1 - i\sqrt{3}$.

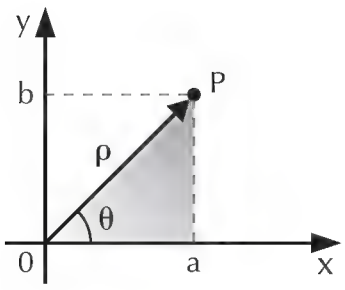
08. O produto de z pelo seu conjugado é $z \cdot \bar{z} = 4$.

16. O módulo de z é $|z| = 10$.

32. A norma de z é $|z|^2 = 4$.

12. Argumento de um número complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, com $z \neq 0$ e sendo P o afixo de *z*, denomina-se *argumento do complexo z* o ângulo θ ($0° \leq 0 \leq 360°$), formado por $\overleftrightarrow{OP}$ com o eixo real x, medido no sentido anti-horário, como podemos observar no gráfico a seguir.



Notação: $\theta = \arg(z)$, onde θ é o ângulo e *arg(z)* é o argumento de *z*.

Sendo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ (módulo de z), e observando o triângulo destacado no gráfico, podemos definir:

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{\rho}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{\rho}$$

Por meio do *seno* e *cosseno* de θ, podemos determinar o ângulo θ usando os valores da tabela trigonométrica.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine o argumento do complexo $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

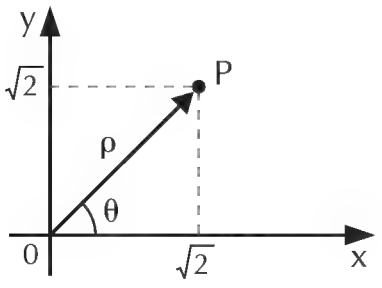
Resolução:

$a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2}$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \rho = 2$$

Cálculo de θ:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



E o ângulo que tem cosseno e seno, cujos valores notáveis são $\frac{\sqrt{2}}{2}$, é: $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = 45°$

13. Forma trigonométrica ou polar dos números complexos

Vimos que a forma algébrica de um número complexo z é $z = a + bi$. Agora, escreveremos o mesmo número complexo z, só que em função de seu módulo e de seu argumento. A esta forma denominamos *forma trigonométrica* ou *polar* de z.

Como $\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos\theta$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$

então, substituindo esses valores na forma algébrica $z = a + + bi$, temos: $z = \rho \cdot \cos\theta + \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot i$

$z = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$, que é a forma trigonométrica ou polar de z.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Obtenha a forma trigonométrica do número complexo $z = \sqrt{3} + i$.

Resolução:

Temos: $\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$

Então:

$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} \Rightarrow \rho = 2$

Calculando o argumento de z:

$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 30° \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{6}$

$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ ou $z = 2 \cdot (\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

2. Passe para a forma algébrica o número complexo

$z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

Resolução:

Temos agora o problema inverso.

Como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

então:

$z = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow z = \frac{2}{2} + i\frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = 1 + i\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

31. Dados os números complexos: $z_1 = 8 \cdot (\cos 60° + i \cdot \text{sen } 60°)$ e $z_2 = 2 \cdot (\cos 30° + \text{sen } 30°)$, calcule:
    a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$

32. Sendo $z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, $z_2 = 3 \cdot (\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi)$ e $z_3 = 4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, números complexos, obtenha:
    a) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
    b) $\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

33. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos:
    a) $z = -4$ c) $z = 1 + \sqrt{3}i$
    b) $z = -3i$

34. Passe para a forma trigonométrica os seguintes números complexos:
    a) $z = 1 + i$ c) $z = -5$
    b) $z = 8i$

35. Passe para a forma algébrica os números complexos abaixo:
    a) $z = 4 \cdot (\cos 45° + \text{isen } 45°)$
    b) $z = 2 \cdot (\cos 270° + \text{isen } 270°)$
    c) $z = 2 \cdot (\cos 315° + \text{isen } 315°)$

36. (PUC-RS) Se $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ e $w = |w| \cdot (\cos y + i\,\text{sen}\,y)$ são, respectivamente, as formas trigonométricas dos números complexos $z = 1 + \sqrt{3}i$ e $w = -1 + \sqrt{3}i$, então o valor de $y - \theta$ é:
    a) 30° c) 60° e) 120°
    b) 45° d) 90°

Capítulo 14

Polinômios e Equações Polinomiais

Embora a resolução da equação do 2º grau já fosse conhecida desde o século VI d.C., somente no século XVI, Scipion del Ferro e Cardan, matemáticos italianos, desenvolveram fórmulas de solução para equações do 3º e do 4º graus.

A partir de então, os matemáticos de todo o mundo tentaram desenvolver fórmulas para solucionar equações do 5º grau ou maior; mas, em 1824, o norueguês Niels Henrich Abel provou que fórmulas gerais para solucionar equações com graus superiores não poderiam existir, embora as equações pudesem ser resolvidas por outros meios.

Agora que, finalmente, estudamos o último conjunto de números — o conjunto dos números complexos —, podemos dar início ao estudo dos polinômios.

1. Função polinomial

Chamamos de *função polinomial* ou *polinômio* a toda função P: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por uma equação do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

onde: P(x) é o polinômio em x, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0 são números reais denominados *coeficientes*; n, n−1, n−2, ..., 2, 1, 0 são números naturais denominados *expoentes*; x é um número complexo denominado *variável*; e a_nx^n, $a_{n-1}x^{n-1}$, $a_{n-2}x^{n-2}$, ..., a_2x^2, a_1x, a_0 são os *termos* ou *monômios*.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Diga se são ou não funções polinomiais as seguintes expressões algébricas.

a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x + 1$
b) $P(x) = x^2 + 2x + 1$
c) $P(x) = 3$
d) $P(x) = x^2 + 5x - 4$
e) $P(x) = \sqrt{x^3} + x^2 - 2x + 1$
f) $P(x) = x^3 + 2x^2 + \sqrt{-4x}$

Resolução:

a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x + 1$ é função polinomial.

b) $P(x) = x^2 - 2x + 1$ é função polinomial.

c) $P(x) = 3$ é função polinomial.

d) $P(x) = x^{-2} + 5x - 4$ não é função polinomial, pois −2 não é um número natural ($-2 \in \mathbb{N}$).

e) $P(x) = \sqrt{x^3} + x^2 - 2x + 1$ não é função polinomial, pois $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ e o expoente $\frac{3}{2}$ não é um número natural $\left(\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}\right)$.

f) $P(x) = x^3 + 2x^2 + \sqrt{-4x}$ não é função polinomial, pois $\sqrt{-4x}$ não é um número real $\left(\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}\right)$.

2. Grau do polinômio

O *grau do polinômio* é dado pelo maior expoente de x com coeficiente diferente de zero. Assim, no polinômio:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, se $a_n \neq 0$, o grau do polinômio P(x) é o expoente máximo n ou seja:

gr(P) = n, onde gr(P) é o grau do polinômio.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine o grau dos polinômios abaixo:

   a) $P(x) = 6x^3 - 15x^2 - 3x + 14x^4 + 9$

   b) $P(x) = 2x^9 + 3x^8 - x^7$

   c) $P(x) = 12x^3 - x^2 + 4x - 10x^3 + 2x + x^4 + 1 - 2x^4$

   d) $P(x) = \sqrt{2}\,x - 1$

   e) $P(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - 1$

   f) $P(x) = -3$

Resolução:

a) Ordenando decrescentemente os expoentes da variável x, temos: $P(x) = 14x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 3x + 9$, de onde podemos concluir que: gr(P) = 4

b) gr(P) = 9

c) Reduzindo os termos semelhantes e ordenando decrescentemente os expoentes da variável x, temos:

$P(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2 + 6x + 1$, de onde gr(P) = 4

d) gr(P) = 1

e) gr(P) = 5

f) É um polinômio constante, ou seja: gr(P) = 0, pois podemos escrever $P(x) = -3x^0$

2. Ordene e complete o polinômio em x, abaixo:

$P(x) = 5x^3 - 2x^4 + 1$

Resolução:

Ordenando: $P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 1$

Completando: $P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 0x^2 + 0x + 1$

3. Princípio de identidade de polinômios

Dois polinômios são iguais quando seus coeficientes são iguais, ou seja, os polinômios

$A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e

$B(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$

serão iguais se, e somente se:

$a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$

Quando isto ocorre, dizemos que $A(x)$ *é idêntico a* $B(x)$ e indicamos por $A(x) \equiv B(x)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sendo os polinômios $A(x) = 2x^3 + nx^2 - mx + 7$ e $B(x) = px^3 + 3x^2 - 4x + 7$, estabeleça as condições para que $A(x)$ e $B(x)$ sejam idênticos.

Resolução:

Os coeficientes devem ser iguais. Logo, para que $A(x) \equiv B(x)$ devemos ter $p = 2$, $n = 3$ e $m = 4$.

4. Polinômio identicamente nulo

Dizemos que um polinômio é identicamente nulo, quando todos os seus coeficientes são iguais a zero, e indicamos por $P(x) \equiv 0$. Exemplo:

Sendo $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_o$, temos:

$$a_n = a_{n-1} = ... = a_o = 0$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine *a*, *b* e *c* de modo que o polinômio $P(x) = (2a - 1)x^2 + (3a - 2b)x + (4a - c)$ seja identicamente nulo.

Resolução:

Para que P(x) seja identicamente nulo, todos os seus coeficientes devem ser iguais a zero.

Então:

$2a - 1 = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

$3a - 2b = 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{2} - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{4}}$

$4a - c = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} - c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 2}$

5. Valor numérico de um polinômio

Quando, em um polinômio P(x), substituímos *x* por um número *a* ($a \in \mathbb{C}$), obtemos um número que indicaremos por P(a). A esse número chamamos de *valor numérico* de P(x).

Caso o valor numérico de P(x) para $x = a$ seja igual a zero, dizemos que *a* é a *raiz* ou *zero* desse polinômio.

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow a \text{ é raiz de } P(x)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dado o polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$, obtenha o valor numérico de P(x), para $x = 2$.

Resolução:

Temos: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$

$P(2) = 2 \cdot (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 + 2 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(2) = 16 - 12 + 1 \Rightarrow \boxed{P(2) = 5}$

2. Sendo $x = 3$, raiz ou zero de $P(x) = -x^3 + 2x^2 + yx - 6$, obtenha o valor de y.

Resolução:

$P(3) = 0 \Rightarrow -3^3 + 2 \cdot (3)^2 + y \cdot 3 - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y = 15 \Rightarrow \boxed{y = 5}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Destaque os termos e os coeficientes dos polinômios a seguir:

   a) $P(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{1}{5}x^2 + x - 3$

   b) $Q(x) = 2^{-3}x^2 - 5x + \sqrt{2}$

   c) $R(x) = -x^2 + x + 1$

2. Assinale quais dos itens a seguir representam uma função polinomial:

   a) $P_1(x) = 3^{-2}x^5 + 2x^2 - 1$

   b) $P_2(x) = \sqrt{5}\,x^3 + 7x^2 - 5\sqrt{x} + 3$

   c) $P_3(x) = \frac{2}{5}x + \sqrt{2}$

   d) $P_4(x) = 8x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$

   e) $P_5(x) = 2x^3 - 5x^{-2} - 2x + 3$

   f) $P_6(x) = 5x^2 + \sqrt{-2}\,x + 1$

   g) $P_7(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} - 5$

3. Determine o grau de cada polinômio em x:

   a) $P(x) = 7x^2 - 3x^4 + 2x^3 + x - 8$

   b) $Q(x) = 5x + 1$

   c) $R(x) = 1$

   d) $S(x) = \sqrt{3}\,x^2 + \frac{1}{3}x$

   e) $T(x) = x^6 + x^8$

   f) $U(x) = 0x^3 + 0x^2 + 2x$

4. Ordene e complete os polinômios em x:

   a) $P(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2 - 6x^7$ b) $Q(x) = \frac{3}{2}x^2$

5. Dado $P(x) = 0$, explique, por meio de um exemplo, o porquê de não se definir o grau para um polinômio nulo.

6. Sendo $P(x) = (a + 1)x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, o valor de a para que o grau do polinômio $P(x)$ seja igual a 2 é:

   a) 0 b) 3 c) -1 d) -3 e) 1

7. (Mackenzie-SP) Determine $m \in \mathbb{R}$, para que o polinômio $P(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ seja de grau 2.

8. Dado o polinômio:

   $P(x) = mx^5 + 3x^4 - 2x^3 + 9$, determine o valor de m para que:

   a) $P(x)$ seja do 4º grau, isto é: $gr(P) = 4$.

   b) $P(x)$ seja do 5º grau, isto é: $gr(P) = 5$.

9. (Fuvest-SP) Calcule os coeficientes do polinômio do 1º grau $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $P(0) = 1 + i$ e $P(1 + i) = 0$.

6. Operações com polinômios

Para as próximas seções, utilizemos para efeito de exemplo os polinômios:

$A(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ e $B(x) = -x^2 + 8x - 3$

6.1 Adição

Somar dois ou mais polinômios é obter um polinômio onde os coeficientes são dados pela adição dos coeficientes dos termos semelhantes.

Reduzindo os termos semelhantes numa só linha, temos:

$A(x) + B(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1 - x^2 + 8x - 3$

$A(x) + B(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$

6.2 Subtração

A diferença de dois polinômios A(x) e B(x) é o polinômio obtido pela soma de A(x) com o oposto de B(x).

Para A(x) e B(x) do exemplo anterior:

$A(x) - B(x) = (5x^3 + 4x^2 - 3x - 1) - (-x^2 + 8x - 3)$

$A(x) - B(x) = 5x^3 + 5x^2 - 11x + 2$

6.3 Multiplicação

Obter o produto de dois polinômios A(x) e B(x) é aplicar a propriedade distributiva do polinômio A(x) em B(x).

$A(x) \cdot B(x) = (5x^3 + 4x^2 - 3x - 1) \cdot (-x^2 + 8x - 3)$

$A(x) \cdot B(x) = -5x^5 + 36x^4 + 20x^3 - 35x^2 + x + 3$

6.4 Divisão

Sejam dois polinômios A(x) e B(x), onde A(x) é o dividendo e B(x) é o divisor, com $B(x) \not\equiv 0$. Dizemos que existe um único par de polinômios Q(x) e R(x) em que Q(x) é o quociente e R(x) é o resto, tal que:

$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \Rightarrow gr\,(R) < gr\,(B)$ ou $R(x) \equiv 0$

E se $R(x) \equiv 0$, dizemos que a divisão é *exata* ou então que A(x) é divisível por B(x).

Esquematicamente, temos:

A(x)	B(x)
R(x)	Q(x)

Observe este exemplo.

Dividindo os polinômios: A(x) por B(x) pelo método da chave, temos:

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 + 4x^2 - 3x - 1 & -x^2 + 8x - 3 \\ \cline{2-2} -5x^3 + 40x^2 - 15x & \underbrace{-5x - 44}_{\text{quociente}} \\ \cline{1-1} 44x^2 - 18x - 1 & \\ -44x^2 + 352x - 132 & \\ \cline{1-1} \underbrace{334x - 133}_{\text{resto}} & \end{array}$$

Os procedimentos para resolver essa divisão são:

a) Dividimos o termo de maior grau do dividendo ($5x^3$) pelo termo de maior grau do divisor ($-x^2$), obtendo o primeiro termo do quociente ($-5x$).

b) Multiplicamos o termo obtido no quociente ($-5x$) por todos os termos do divisor ($-x^2 + 8x - 3$) e adicionamos o produto assim obtido ($5x^3 - 40x^2 + 15x$) com os sinais trocados ao dividendo.

c) Como o resto parcial ($44x^2 - 18x - 1$) ainda não apresenta grau menor do que o divisor, então repetimos o processo até obter um resto nulo ou, como no nosso exemplo, o resto cujo grau é menor do que o do divisor: $gr(R) = 1 < gr(B) = 2$.

Assim, temos: o resto $R(x) = 334x - 133$ e o quociente $Q(x) = -5x - 44$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sendo $A(x) = 6x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ e $B(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, resolva as operações e dê o grau dos polinômios resultantes:

a) $A(x) + B(x)$

b) $A(x) - B(x)$

c) $A(x) \cdot B(x)$

d) $A(x) \div B(x)$

Resolução:

a) $A(x) + B(x) = 6x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

Portanto, o polinômio resultante é de 4º grau

b) $A(x) - B(x) = 6x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 1$

Portanto, o polinômio resultante é do 4º grau.

c) $A(x) \cdot B(x) = 6x^7 + 10x^6 - 21x^5 + 19x^4 - 8x^3 + 7x^2 - - 5x + 2$

Portanto, o polinômio resultante é do 7º grau.

d) $A(x) \div B(x)$

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1 & x^3 + 2x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2} -6x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 12x & 6x - 14 \\ \cline{1-1} \quad -14x^3 + 19x^2 - 13x + 1 & \\ \quad +14x^3 + 28x^2 - 42x + 28 & \\ \cline{1-1} \quad 47x^2 - 55x + 29 & \end{array}$$

$Q(x) = 6x - 14$ e $R(x) = 47x^2 - 55x + 29$

Portanto, $Q(x)$ é do 1º grau e $R(x)$ é do 2º grau.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. (PUC-SP) Sendo $x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 + ax + b)$ para todo x real, os valores de a e b são, respectivamente:

a) -1 e -1 c) 1 e 1 e) -1 e 1

b) 0 e 0 d) 1 e -1

11. (UFBA) Considere os polinômios:

$P_1 = 3a^3 - 4a^2b + 7b^3$

$P_2 = -6a^3 + 15a^2b + 5b^3$

$P_3 = ma^3 + na^2b + pb^3$

Sendo $P_1 + P_2 + P_3 \equiv 0$, calcule $|m + n + p|$

12. (Cescem-SP) Dividindo $(x^3 - 4x^2 + 7x - 3)$ por um certo polinômio $P(x)$, obtemos quociente $(x - 1)$ e o resto $(2x - 1)$. O polinômio $P(x)$ é igual a:

a) $2x^2 - 3x + 2$ c) $x^2 - x + 1$ e) n. d. a.

b) $x^2 - 3x + 2$ d) $2x^2 - 3x + 1$

13. (Cescem-SP) Dividindo-se $P(x)$ por $(x - 3)$ resulta um resto -7 e um quociente $(x - 4)$. Qual é $P(x)$?

a) $x^2 - 7x + 5$ c) $\dfrac{x + 4}{x - 4}$ e) $2x^2 - 14x + 10$

b) $2x$ d) $2x^2 - x + 14$

14. (UFGO) Associe a cada uma das alternativas abaixo a letra V se for verdadeira e a letra F se for falsa.

I – A soma de dois polinômios do 3º grau é sempre um polinômio do 3º grau.

II – O produto de um polinômio do 2º grau por um do 3º grau é sempre um polinômio do 6º grau.

III– A diferença entre um polinômio do 3º grau e um do 2º grau é sempre um polinômio do 3º grau.

IV– O resto da divisão de um polinômio do 3º grau por um do 2º grau é sempre um polinômio do 1º grau.

Na ordem apresentada, tem-se:

a) FFVV b) FFVF c) VVFF d) VVVF e) VFVF

7. Método de Descartes

A divisão de polinômios, como já vimos, pode ser efetuada pelo método da chave ou divisão euclidiana. Entretanto, o matemático e filósofo francês Descartes desenvolveu um outro método, que leva o seu nome, o *Método de Descartes*.

O que Descartes verificou é que o quociente pode ter sua forma algébrica determinada por meio da equação:

$gr(Q) = gr(A) - gr(B)$, onde A(x) é o dividendo e B(x) é o divisor.

Os coeficientes, sob a forma geral, serão determinados pela da identidade de polinômios.

Da mesma maneira, o resto deve obedecer à condição:

$$gr(R) < gr(B) \text{ ou } R(x) \equiv 0$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine p e q de modo que:
$A(x) = x^3 - px^2 - qx + 2$ seja divisível por
$B(x) = x^2 - 3x + 2$

Resolução:

Se A(x) é divisível por B(x), então o resto R(x) ≡ 0.

Calculando o grau de Q(x), temos:

gr(Q) = gr(A) − gr(B) = 3 − 2 = 1 e Q(x) = ax + b

Logo: A(x) = B(x) · Q(x)

$x^3 - px^2 - qx + 2 = (x^2 - 3x + 2) \cdot (ax + b)$

Efetuando o produto do segundo membro da identidade e igualando os coeficientes dos termos semelhantes, temos:

$x^3 - px^2 - qx + 2 = ax^3 + (-3a + b)x^2 + (2a - 3b)x + 2b$,

onde a = 1

$-p = 3a + b \Rightarrow -p = 3 + b$

$2a - 3b = -q \Rightarrow 2 - 3b = -q$

$2b = 2 \Rightarrow b = 1$

Substituindo os valores de *b* nas outras equações, temos:

$-p = 3 + 1 \Rightarrow p = -4$

$-q = 2 - 3 \cdot 1 \Rightarrow q = 1$

$Q(x) = ax + b \Rightarrow$ **Q(x) = x + 1**

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

15. (UFAM) A divisão de $P(x) = x^3 - 7x + 6$ por D(x) = x − 2 apresenta o quociente $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Os valores de *a*, *b* e *c* são, respectivamente:

    a) 1, 2 e −3 b) 1, −2 e −3 c) 1, 2 e 3 d) −1, 2 e 3

16. (UFSC) Os números *m* e *n* são tais que o polinômio $x^4 - 3x^3 - 11x^2 + mx + n$ é divisível por $x^2 - 3$. O valor de m + n é:

17. (UFSC) Qual o valor de *a* para que o polinômio $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + ax^2 - 4x + 12$ seja divisível por $x^3 + 2x^2 - x + 3$?

18. (UFSC) Determine o resto da divisão do polinômio $3x^3 + 8x^2 + 32$ por x + 3.

19. (UFPI) O resto da divisão de $kx^2 + x - 1$ por x + 2k é:

    a) $-2k - 1$ c) $4k^2 - 4k - 1$ e) $4k^3 - 2k - 1$

    b) k − 1 d) $k^3 - k - 1$

20. (UFPI) Se o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + ax + b$ é divisível por $(x - 1)^2$, então podemos afirmar que:

a) $a = -5$ e $b = -3$ c) $a = 5$ e $b = 3$ e) $a = 3$ e $b = 5$

b) $a = -5$ e $b = 3$ d) $a = 5$ e $b = -3$

8. Equações polinomiais

Denominamos *equações polinomiais*, ou *algébricas*, às equações da forma: $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é um polinômio de grau $n > 0$.

Resolver uma equação algébrica é obter o seu *conjunto-verdade*, que é o conjunto de todas as suas raízes, isto é, os valores de x que tornam verdadeira a igualdade:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1 x + a_0 = 0$$

9. Teorema fundamental da álgebra

Demonstrado por Gauss, em 1799, o teorema fundamental da álgebra afirma que:

> Toda equação algébrica $P(x) = 0$, de grau $n > 0$, admite pelo menos uma raiz real ou complexa.

Embora o teorema nos garanta que toda equação polinomial tem uma solução, ele não nos ensina como obtê-la. As equações do 5º grau e maiores, como já foi dito, não possuem fórmulas para sua solução, mas veremos formas alternativas de resolvê-las.

10. Teorema da decomposição

Todo polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ de grau $n > 0$ pode ser decomposto em um produto de n fatores do tipo $(x - \alpha)$, onde α é raiz de $P(x)$:

$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são raízes de $P(x)$ e a_n é o coeficiente inicial.

Teorema da decomposição:

> Todo polinômio de grau *n* tem exatamente *n* raízes reais e complexas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Obtenha a forma fatorada do polinômio: $P(x) = 2x^2 - 6x - 8$.

Resolução:

As raízes dessa equação são $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 4$ e, como podemos colocar 2 em evidência, então $a_n = 2$

$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \Rightarrow P(x) = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)$

2. Componha os polinômios, sabendo-se que suas raízes são:

a) 1, 3 e 9 b) −5, 0, 1 e −1

Resolução:

a) Como P(x) possui três raízes distintas, então P(x) é do 3º grau. Logo:

$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3)$

Fazendo $a_n = 1$, temos:

$P(x) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 9)$

Efetuando-se o produto, temos:

$$P(x) = x^3 - 13x^2 + 39x - 27$$

b) P(x) é do 4º grau, pois possui quatro raízes distintas. Logo:

$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot (x - \alpha_4)$

Fazendo $a_n = 1$ e substituindo os valores das raízes, temos:

$P(x) = 1 \cdot (x + 5) \cdot (x + 0) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

$P(x) = 1 \cdot (x + 5) \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

$$P(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21. Obtenha a forma fatorada dos polinômios abaixo:

a) $5x^2 - 20x + 15 = 0$

b) $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$

22. (Fuvest-SP) O polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + x + a$ é divisível por $x - 1$. Encontre todas as raízes complexas de $P(x)$.

23. Se o polinômio $x^3 - 3x^2 - x + k$ é divisível por $x - 1$, então uma das raízes da equação $x^3 - 3x^2 - x + k = 0$ é:

a) 2 b) 0 c) 3 d) −3 e) −2

24. (UFAL) A equação $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ tem duas raízes opostas. A soma de suas raízes negativas é:

a) −6 b) −5 c) −3 d) −2 e) −1

25. (UFSC) Sabendo-se que uma das três raízes da equação $2x^3 - 17x^2 + 32x - 12 = 0$ é igual a $\frac{1}{2}$, determine a soma das outras duas raízes.

26. (UFAL) Uma das raízes da equação $x^3 - x^2 - 17x - 15 = 0$ é −3. As demais raízes são:

a) −5 e 1 c) −1 e 5 e) 2 e 4

b) −1 e 4 d) 1 e 4

11. Multiplicidade de uma raiz

Uma equação algébrica pode apresentar todas as suas raízes distintas ou não.

Quando uma raiz ocorre mais de uma vez na forma fatorada de P(x), denominamos esta raiz de *raiz múltipla* de P(x). Assim, se uma equação algébrica tiver duas raízes iguais, diremos que essa raiz terá multiplicidade 2 (raiz dupla), se houver três raízes iguais, a multiplicidade será 3 (raiz tripla), e assim por diante. Caso contrário, a raiz será denominada *simples*.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine a multiplicidade das raízes da equação algébrica: $(x - 3)^2 \cdot (x + 5) = 0$.

Resolução:

A equação dada pode ser escrita da seguinte maneira: $(x - 3) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5) = 0$.

Essa equação tem três raízes, tais que:

3: é uma raiz dupla, isto é, tem multiplicidade 2
−5: é uma raiz simples

12. Teorema das raízes complexas

Se uma equação $P(x) = 0$, de coeficientes reais, apresentar uma raiz complexa $(a + bi)$, então o complexo deste número também será raiz de $P(x)$, ambos com a mesma multiplicidade.

Em um polinômio $P(x)$ com coeficientes reais e grau ímpar há, no mínimo, uma raiz real.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule as raízes da equação: $x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x + 10 = 0$, sendo $(2 + i)$ uma dessas raízes.

Resolução:

Se $(2 + i)$ é uma raiz, então $(2 - i)$ também o é.

Temos:

$P(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot Q(x) = 0$

$P(x) = [x - (2 + i)] \cdot [x - (2 - i)] \cdot Q(x) = 0$

$P(x) = [(x - 2) + i] \cdot [(x - 2) - i] \cdot Q(x) = 0$

Temos o produto de uma soma por uma diferença (caso de fatoração). Logo:

$P(x) = [(x - 2)^2 - i^2] \cdot Q(x) = 0$

$P(x) = (x^2 - 4x + 5) \cdot Q(x) = 0$

Para obtermos as outras duas raízes, basta dividirmos, lembrando que: $D = d \cdot q$

$x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x + 10 = (x^2 - 4x + 5) \cdot (ax^2 + bx + c)$

$x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x + 10 =$

$= ax^4 + (b - 4a)x^3 + (c - 4b + 5a)x^2 + (-4c + 5b)x + 5c$

Pela igualdade dos termos correspondentes:

$a = 1$

$b - 4a = -1 \Rightarrow b - 4 \cdot 1 = -1 \Rightarrow b = -1 + 4 \Rightarrow b = 3$

$c - 4b + 5a = -5 \Rightarrow c - 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = -5$

$c - 12 + 5 = -5 \Rightarrow c = 2$

Portanto: $Q(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow Q(x) = x^2 + 3x + 2$

De onde: $x' = -2$ ou $x'' = -1$

Assim: $S = \{-2, -1, 2 + i, 2 - i\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27. Componha os polinômios P(x), onde as raízes são:
    a) -2, 1, 2 e 3 b) -3, 0, 1

28. (UFSC) O número complexo $(1 + 4i)$ é raiz da equação: $x^2 + px + q = 0$ de coeficientes reais. Determine o valor de $q - p$.

29. (UFSE) Uma das raízes da equação $3x^3 + 21x^2 + 48x + 30 = 0$ é $3 + i$. Em conseqüência, é verdade que:
    a) a equação não tem raízes reais.
    b) a equação tem uma raiz dupla.
    c) outra raiz da equação é i.
    d) outra raiz da equação é 3.
    e) outra raiz da equação é $3 - i$.

30. (Cesgranrio-RJ) Sabendo-se que $2i$ e $1 + \sqrt{2}$ são raízes do polinômio $x^5 + 4x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 24$, podemos afirmar que:
    a) a soma de todas as raízes é igual a 4.
    b) $-2i$ e $-1 - \sqrt{2}$ são raízes da equação.
    c) $-2i$ e 3 são raízes da equação.
    d) $-2i$ e 6 são raízes da equação.
    e) o produto das raízes é -24.

31. Uma das raízes reais da equação $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$, com $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$ é $2 + i$. O valor de $a + b$ é:

a) 5 b) -5 c) -4 d) 4 e) 9

13. Relações de Girard

São as relações estabelecidas entre as raízes e os coeficientes de uma equação algébrica, $P(x) = 0$.

Se a equação for do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, com raízes x_1 e x_2, então:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Se a equação for do 3º grau, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com raízes x_1, x_2 e x_3, teremos as seguintes relações:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}; x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Essas relações podem ser generalizadas para equações do 4º grau ou maior.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine as relações entre as raízes e os coeficientes das equações:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $2x^3 - 4x^2 + 6x + 10 = 0$

Resolução:

a) Na equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, temos que:

$n = 2$, $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$

Logo, temos:

- soma das raízes

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{4}{1} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 4$$

- produto das raízes

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{3}{1} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 3$$

b) Na equação $2x^3 - 4x^2 + 6x + 10 = 0$, temos:

$n = 3$, $a = 2$, $b = -4$, $c = 6$ e $d = 10$

Assim temos:

- soma das raízes

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

- soma dos produtos tomados dois a dois

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3$$

- produto das raízes

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{10}{2} = -5$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

32. Determine as raízes da equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, sabendo que uma raiz é igual à soma das outras duas.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

33. (PUC-SP) Um polinômio f, com coeficientes reais, admite as raízes -1, $1-i$ e 2 de multiplicidade 2, 3 e 1, respectivamente. O grau de f é, no mínimo:

a) 3 b) 5 c) 6 d) 8 e) 9

34. (UFMG) Se *a*, *b* e *c* são raízes da equação $x^3 + x - 1 = 0$, calcule o valor de $\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

35. (PUC-SP) Calcule a soma das raízes da equação

$17x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 14x + 5 = 0$

Capítulo 15

Geometria Analítica

A Geometria Analítica foi desenvolvida durante o século XVII por René Descartes (1596-1650), filósofo, físico, advogado e matemático francês, autor da máxima "Penso, logo existo".

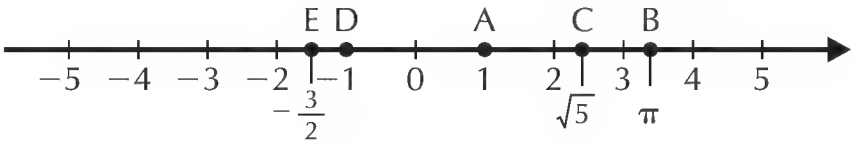
Sua obra foi exposta em seu livro *La Géometrie*, que introduziu a álgebra no estudo da geometria e vice-versa, criando a geometria com coordenadas. Seus estudos foram tão significativos que a palavra *cartesiano* é uma homenagem ao seu nome, pois Descartes, em latim, é *Cartesius*.

1. Definição

Um dos objetivos da Geometria Analítica é determinar a reta que representa uma certa equação ou obter a equação de uma reta dada, estabelecendo uma relação entre a geometria e a álgebra.

2. Sistema de coordenadas sobre uma reta

Estabelecer um sistema de coordenadas sobre uma reta é associar, a cada ponto desta reta, um número real. Conseqüentemente, todo ponto dessa reta fica determinado, quando é dada a sua coordenada. Assim, na reta abaixo, temos:

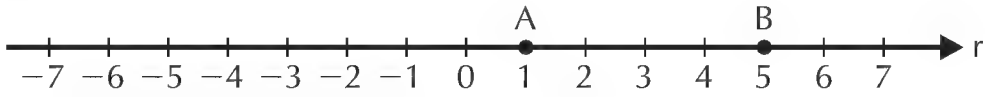


Os pontos A, B, C, D e E estão associados, respectivamente, aos números reais 1, π, $\sqrt{5}$, -1 e $\frac{3}{2}$. Portanto, podemos afirmar que:

- a coordenada de A é o número real 1;
- a coordenada de B é o número real π, e assim por diante.

3. Distância entre dois pontos na reta real

A distância entre dois pontos A e B, em uma reta, é determinada pelo módulo ou valor absoluto da diferença entre as coordenadas de A e B; por isso, a distância será sempre um número real não-negativo e que representa o *comprimento do segmento* $\overline{AB}$. Exemplo:



$d(A, B) = |5 - 1| = |1 - 5| = 4$

Portanto, de maneira geral, temos:

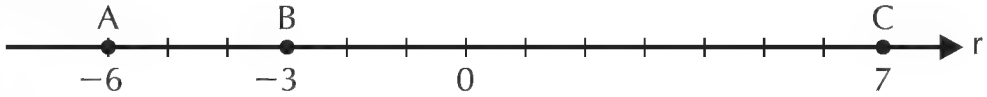
$d(A, B) = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$, onde as coordenadas de A e B são x_1 e x_2, respectivamente.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sabendo-se que na reta real os pontos A, B e C têm coordenadas -6, -3 e 7, respectivamente, determine as distâncias abaixo:

a) d(A, B) b) d(B, C) c) d(A, C)

Resolução:



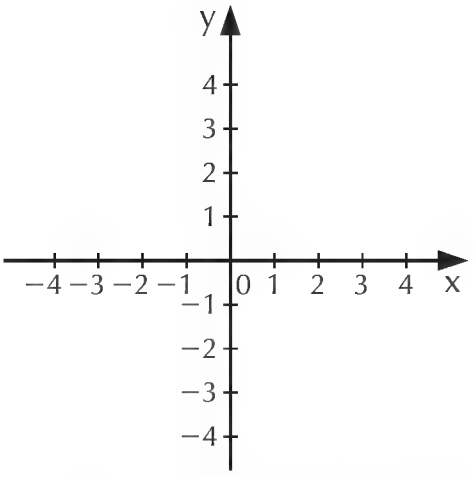
a) $d(A, B) = |-3 - (-6)| = |-3 + 6| = |3| = 3$

b) $d(B, C) = |7 - (-3)| = |7 + 3| = |10| = 10$

c) $d(A, C) = |7 - (-6)| = |7 + 6| = |13| = 13$

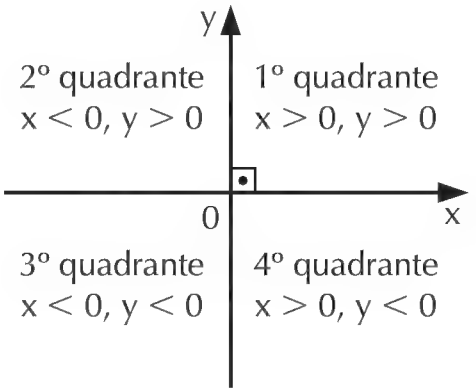
4. Coordenadas cartesianas

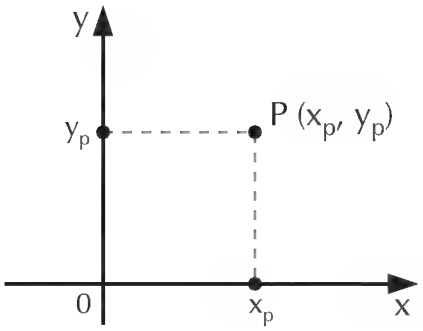
Para representar graficamente um par ordenado de números reais, fixamos um referencial cartesiano ortogonal no plano. A reta x é o eixo das abscissas e a reta y é o eixo das ordenadas.



O ponto O, de intersecção entre as retas *x* e *y*, é denominado de *origem*.

Observe que os eixos x e y dividem o plano em quatro regiões denominadas *quadrantes*:

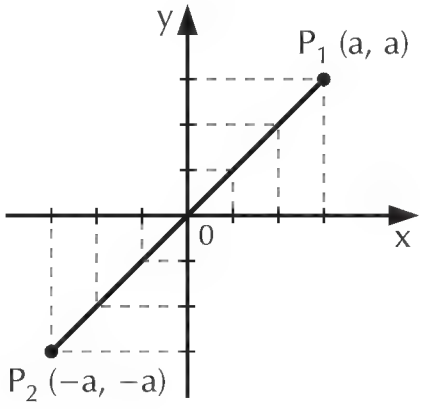




Para determinarmos as coordenadas de um ponto P, traçamos linhas perpendiculares aos eixos x e y.

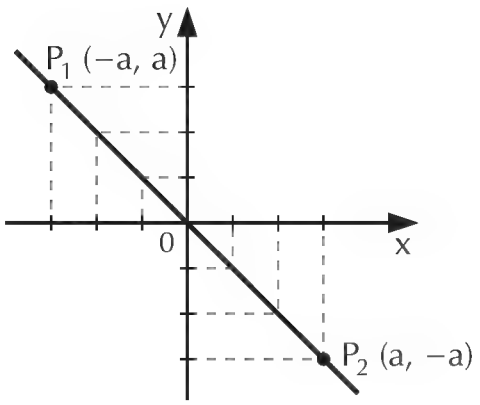
- x_p é a abscissa do ponto P;
- y_p é a ordenada do ponto P;
- x_p e y_p constituem as coordenadas do ponto P.

Os pontos, conforme as coordenadas, pertencem a um dos quadrantes determinados pelos eixos x e y. Os pontos situados sobre os eixos x e y, por convenção, não pertencem a quadrante algum.



Se um ponto P pertencer à bissetriz do 1º e 3º quadrantes, então suas coordenadas serão iguais.

Se um ponto P pertencer à bissetriz do 2º e 4º quadrantes, então suas coordenadas serão simétricas, como se vê ao lado:

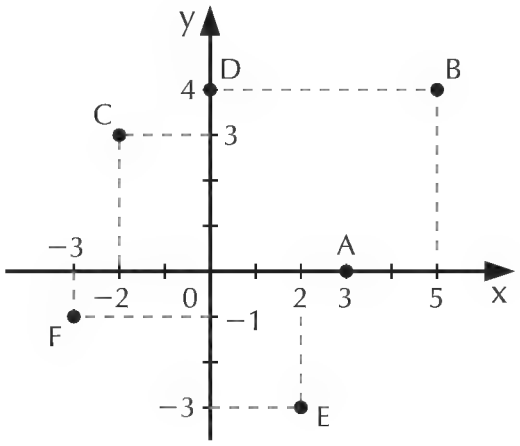


EXERCÍCIO RESOLVIDO

Represente no plano cartesiano ortogonal os pontos:

a) A(3, 0)
b) B(5, 4)
c) C(−2, 3)
d) D(0, 4)
e) E(2, −3)
f) F(−3, −1)

Resolução:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

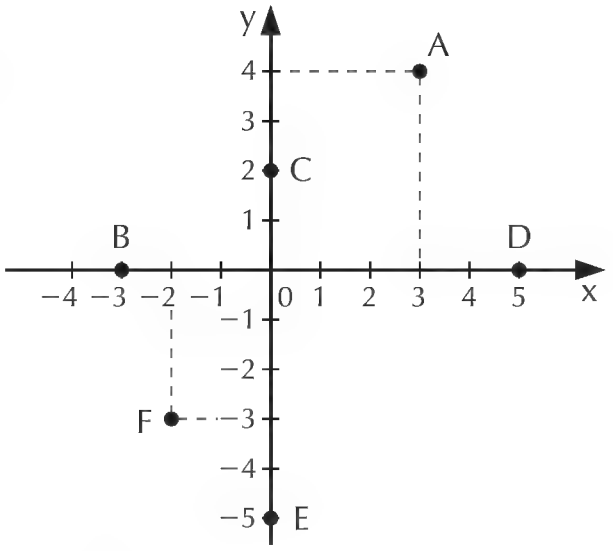
1. Os pontos A, B e C, na reta real, têm coordenadas 2, −6 e −3, respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos a seguir:

   a) $\overline{AB}$ b) $\overline{BC}$ c) $\overline{AC}$

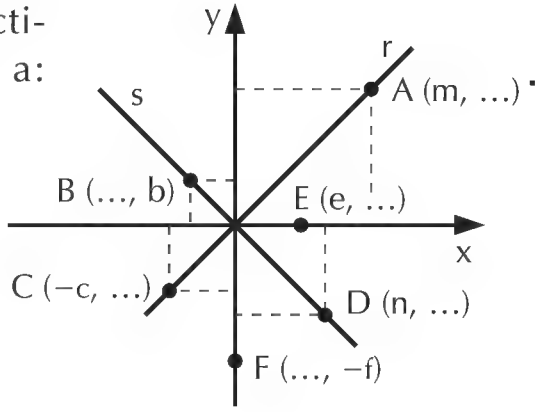
2. Represente no plano cartesiano ortogonal os pontos:

   A(−2, 3), B(3, 0), C(−3, −2), D(1, 2), E(0, −4), F(2, 2) e G(−3, 3).

3. Dê as coordenadas dos pontos assinalados no gráfico abaixo:



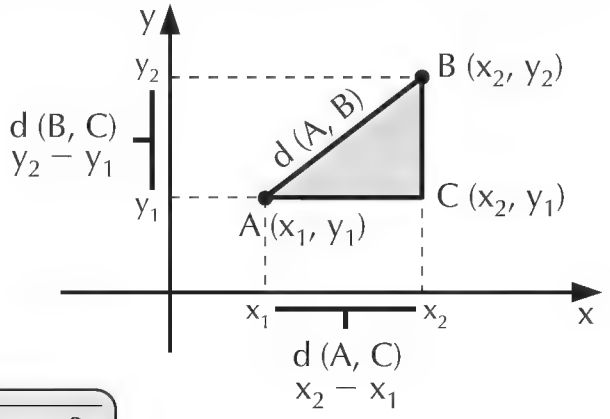
4. Sendo as retas r e s bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares, respectivamente, complete as lacunas com a:
   a) ordenada do ponto A;
   b) abscissa do ponto B;
   c) ordenada do ponto C;
   d) ordenada do ponto D;
   e) ordenada do ponto E;
   f) abscissa do ponto F.



5. Distância entre dois pontos de um plano

Por meio das coordenadas de dois pontos A e B, podemos localizar esses pontos em um sistema cartesiano ortogonal e, com isso, determinar a distância d(A, B) entre eles. Observe a figura ao lado.

Nesse caso, basta verificar que o triângulo ABC é retângulo. Portanto, podemos aplicar o teorema de Pitágoras, obtendo assim a seguinte fórmula:



$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine a distância entre os pontos A(5, 11) e B(2, 7).

Resolução:

$A(5, 11)$: $x_1 = 5$ e $y_1 = 11$ e $B(2, 7)$: $x_2 = 2$ e $y_2 = 7$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow$$

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (7 - 11)^2} \Rightarrow$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{9 + 16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A, B) = \sqrt{25} \Rightarrow \boxed{d(A, B) = 5}$$

2. Calcule o perímetro do triângulo cujos vértices são $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ e $C(2, -5)$.

Resolução:

Para sabermos quanto mede cada lado, basta calcularmos as distâncias entre os pontos:

$$d(A, B) = \sqrt{[6 - (-1)^2 + [1 - (-3)]^2} = \sqrt{65}$$

$$d(A, C) = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + [5 - (-3)]^2} = \sqrt{13}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{52}$$

$$p = d(A, B) + d(A, C) + d(B, C)$$

$$p = \sqrt{65} + \sqrt{13} + \sqrt{52} = \sqrt{65} + \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{13}$$

O perímetro vale $\sqrt{65} + 3 + \sqrt{13}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. Calcule as distâncias entre os pontos abaixo:

a) $A(4, -1)$ e $B(2, 1)$

b) $C(-3, 2)$ e $D(4, -6)$

c) $E(-1, -3)$ e $F(-2, -5)$

6. Calcule a distância do ponto P(8, −6) à origem do sistema.

7. A distância entre os pontos A(x, 3) e B(−1, 7) é 5. Então:
   a) x = 3 ou x = −5
   b) x = 2 ou x = −4
   c) x = 1 ou x = −3
   d) x = 0 ou x = −2
   e) x = −6 ou x = −1

8. (UFC-CE) Se o ponto P(*m*, O) é eqüidistante dos pontos $P_1(2, 4)$ e $P_2(4, 6)$, então *m* é igual a:
   a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

9. (Ufes) Quais as coordenadas do ponto P do plano cartesiano que pertencem à bissetriz do segundo quadrante e equidistam dos pontos A(0, 3) e B(−1, 0)?
   a) (2, 2) b) (0, 2) c) (2, 0) d) (−2, 2) e) (2, −2)

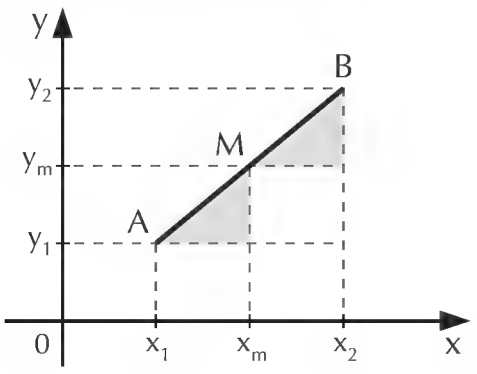
10. (UFSC) Dados os pontos A(−1, −1), B(5, −7) e C(x, 2), determine *x* sabendo que o ponto C é eqüidistante dos pontos A e B.

11. O perímetro do triângulo ABC cujos vértices são A(0, 0), B(12, 5) e C(0, −4) é:
   a) 23 b) 33 c) 22 d) 11 e) 32

6. Ponto médio de um segmento

As coordenadas do ponto médio de um segmento são:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Observe que as coordenadas do ponto médio são a média aritmética das coordenadas dos extremos desse segmento.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dados A(2, 3) e B(6, 1), encontre o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$.

Resolução:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{8}{2}, \frac{4}{2}\right) \Rightarrow M(4, 2)$$

2. Calcule os pontos médios dos lados de um triângulo, onde os vértices são: A(4, 0), B(0, 3) e C(5, 7).

Resolução:

Temos:

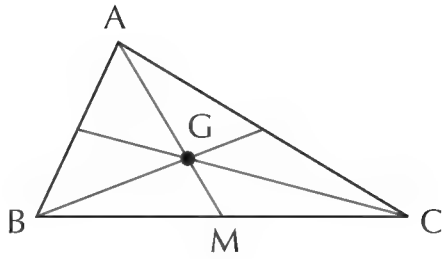
$$M_{AB}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \Rightarrow M_{AB}\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right) \Rightarrow M_{AB}\left(2, \frac{3}{2}\right)$$

$$M_{AC}\left(\frac{4+5}{2}, \frac{0+7}{2}\right) \Rightarrow M_{AC}\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$M_{BC}\left(\frac{0+5}{2}, \frac{3+7}{2}\right) \Rightarrow M_{BC}\left(\frac{5}{2}, 5\right)$$

7. Baricentro

O *baricentro* (G) de um triângulo é o ponto de intersecção das medianas do triângulo.



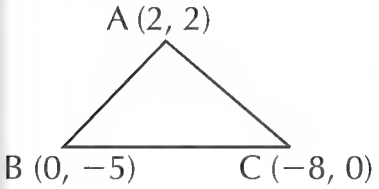
O baricentro divide as medianas na razão de 2 : 1. Na figura, temos: $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$. As coordenadas do baricentro G, de um triângulo ABC, são iguais à média aritmética das coordenadas dos vértices do triângulo:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine o baricentro de um triângulo ABC cujos vértices são (0, −5), (2, 2) e (−8, 0).

Resolução:



$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \Rightarrow$$

$$G\left(\frac{2+0-8}{3}, \frac{2-5+0}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{-6}{3}, \frac{-3}{3}\right) \Rightarrow \boxed{G(-2, -1)}$$

2. Sabendo-se que o baricentro de um triângulo ABC, onde A(1, 5) é G(4,2), calcule o ponto médio do lado $\overline{BC}$.

Resolução:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$4 = \frac{1 + x_B + x_C}{3} \qquad 2 = \frac{5 + y_B + y_C}{3}$$

$$12 = 1 + x_B + x_C \qquad 6 = 5 + y_B + y_C$$

$$x_B + x_C = 11 \text{ (I)} \qquad y_B + y_C = 1 \text{ (II)}$$

Como M é o ponto médio de $\overline{BC}$, então:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$$

Substituindo-se os valores de (I) e (II), temos:

$x_M = \frac{11}{2}$ e $y_M = \frac{1}{2}$. Portanto, $\boxed{M\left(\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12. Determine os pontos médios dos lados de um triângulo cujos vértices são: A(1, 2), B(6, 4) e C(3, 7).

13. Calcule as coordenadas do ponto B, sabendo-se que o ponto A tem coordenadas (2, 1) e o segmento $\overline{AB}$ tem como ponto médio M(3, 3).

14. O baricentro do triângulo ABC, cujos vértices são A(3, 7), B(1, 2) e C(6, 4) é:

a) $\left(\frac{13}{3}, \frac{10}{3}\right)$ c) $\left(\frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$ e) n. d. a.

b) $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{13}\right)$ d) $\left(\frac{3}{13}, \frac{3}{10}\right)$

15. Sabendo-se que o baricentro de um triângulo ABC, onde A(−2, 2), é G(1, −3), calcule o ponto médio do lado $\overline{BC}$.

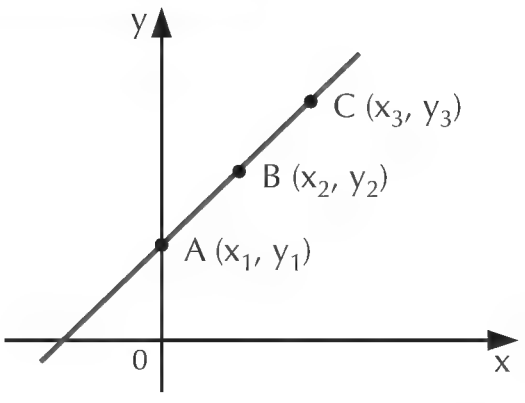
16. (UFRN) Se três vértices de um retângulo são os pontos (−2, −1), (3, −1) e (3, 3), o quarto vértice é o ponto:

a) (−1, −2) c) (−1, −1) e) (3, −2)

b) (−2, 3) d) (−1, 3)

8. Condição de alinhamento de três pontos

Consideremos três pontos de uma mesma reta (colineares), $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, conforme a figura ao lado:



Estes pontos estarão alinhados se, e somente se:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por outro lado, se $D \neq 0$, então os pontos A, B e C serão vértices de um triângulo cuja área é:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} |D|$$

onde o valor do determinante é sempre dado em módulo, pois a área não pode ser um número negativo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verifique se os pontos A, B e C a seguir estão alinhados (são colineares).

   a) A(−1, 3), B(3, 3) e C(2, 0)

   b) A(5, 5), B(2, 2) e C(−3, −3)

Resolução:

Devemos calcular o valor do determinante D. Se $D = 0$, concluímos que os pontos estão alinhados; caso contrário, são vértices de um triângulo.

a) $$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$D = -3 + 6 - 9 - 6 \Rightarrow D = -12 \neq 0$

Como $D \neq 0$, logo os pontos A, B e C não estão alinhados.

Obs.: Assim podemos concluir que os pontos A, B, e C definem um triângulo cuja área é:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2}|-12| \Rightarrow A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 12 \Rightarrow A_{\triangle} = 6$$

b) $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

$D = 10 - 15 - 6 - 10 + 15 + 6 = 0$

$D = 0$, portanto os pontos A, B e C são colineares.

2. Determine o valor de *a* para que os pontos A(2, −3), B(a, 7) e C(a, 1) sejam colineares.

Resolução:

Para que os pontos A, B e C sejam colineares, devemos impor a condição $D = 0$. Assim:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ a & 7 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$14 - 3a + a + 3a - 2 - 7a = 0$$

$$-6a + 12 = 0 \Rightarrow a = 2$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

17. Verifique se os pontos A, B e C estão alinhados nos seguintes casos:

a) A(1, 7), B(−2, 6) e C(4, 8)

b) A(2, −3), B(−1, 4) e C(1, 1)

c) A(2, 5), B(4, 9) e C(1, 3)

18. (UFG-GO) Qual o valor de *m* para que os pontos A = (2m + 1, 2), B(−6, −5) e C(0, 1) sejam colineares?

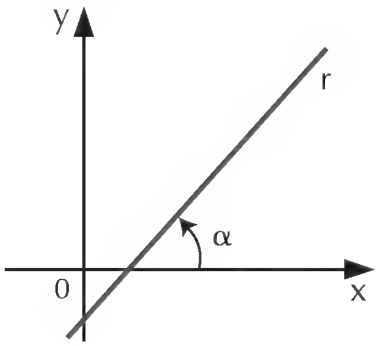
a) −1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\frac{1}{2}$ e) 1

19. (UFMS) Qual a área do triângulo cujos vértices são os pontos A(2, 3), B(4, −5) e C(−3, −6), em unidades de área?

20. (UFSC) Num sistema de coordenadas cartesianas, com suas unidades em centímetros, são localizados três pontos: A(−2, 3), B(3, −3) e C(6, 3). Calcule, em cm^2, a área da figura determinada por esses três pontos.

9. Inclinação de uma reta

À medida do ângulo α, onde α é o menor ângulo que uma reta forma com o eixo *x*, tomado no sentido anti-horário, chamamos de *inclinação da reta r* do plano cartesiano.



10. Coeficiente angular de uma reta

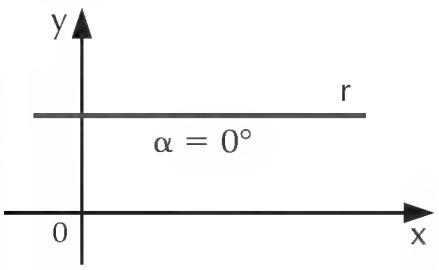
Chamamos de *coeficiente angular* ou *declividade* de uma reta *r* o número real definido por:

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dado α = 0°, calcule o coeficiente angular da reta *r*.

Resolução:



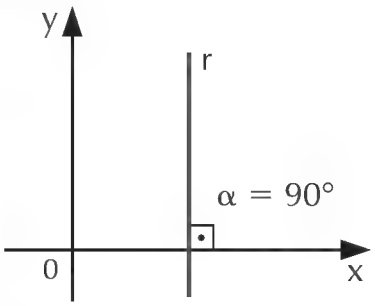
$m = \operatorname{tg} \Rightarrow m = \operatorname{tg} 0°$

$m = \dfrac{\operatorname{sen} 0°}{\cos 0°} \Rightarrow$

$m = 0$

2. Sendo α = 90°, calcule o coeficiente angular da reta *r*.

Resolução:



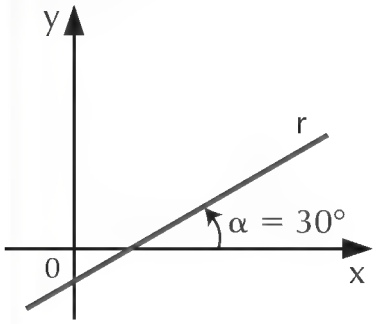
$m = \operatorname{tg} \alpha$

$m = \operatorname{tg} 90° \Rightarrow m = \dfrac{\operatorname{sen} 90°}{\cos 90°}$

$m = \dfrac{1}{0} \Rightarrow$ Logo: $\nexists\ m$

3. Sendo $\alpha = 30°$, determine o coeficiente angular da reta *r*.

Resolução:



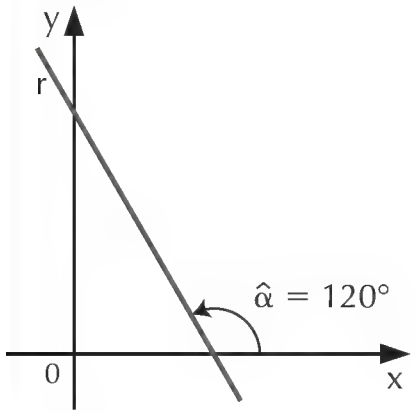
$$m = \text{tg}\ \alpha$$

$$m = \text{tg}\ 30° \Rightarrow m = \frac{\text{sen}\ 30°}{\cos 30°}$$

$$m = \left[\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] \Rightarrow m = -\sqrt{3}$$

4. Dado $\alpha = 120°$, obtenha o coeficiente angular da reta *r*.

Resolução:



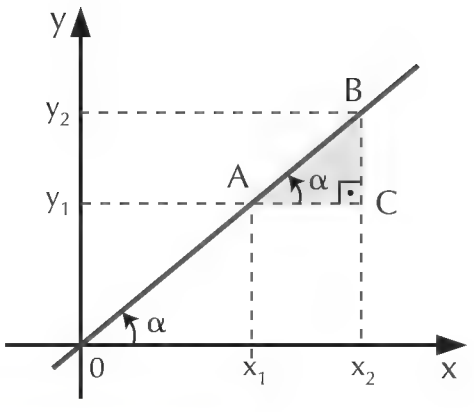
$$m = \text{tg}\ \alpha \Rightarrow m = \text{tg}\ 120°$$

$$m = -\text{tg}\ 60° \Rightarrow m = -\left[\frac{\text{sen}\ 60°}{\cos 60°}\right]$$

$$m = -\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right] \Rightarrow m = -\sqrt{3}$$

10.1 Cálculo do coeficiente angular

Se a inclinação α nos for desconhecida, podemos calcular o coeficiente angular *m* por meio das coordenadas de dois pontos da reta. Observe o exemplo:



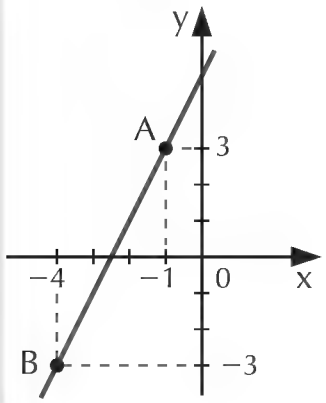
Como o triângulo ABC é retângulo, podemos concluir que:

$$\text{tg}\ \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ com } x_1 \neq x_2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine a declividade (ou coeficiente angular) da reta que passa pelos pontos A(−1, 3) e B(−4, −3).

Resolução:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 3}{-4 - (-1)} = \frac{-6}{-4 + 1}$$

$$m = \frac{-6}{-3} = 2$$

2. Determine o valor de *a* para que a declividade da reta que passa pelos pontos A(a, 5) e B(3, 8) seja 3.

Resolução:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow 3 = \frac{8 - 5}{3 - a} \Rightarrow 3 = \frac{3}{3 - a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot (3 - a) = 3 \Rightarrow 3 - a = 1 \Rightarrow a = 2$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21. Uma reta forma um ângulo de 60° com o sentido positivo do eixo *x*. Determine o coeficiente angular dessa reta.

22. Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos seguintes pontos:

    a) A(−5, −3) e B(−4, 3)

    b) C(2, −5) e D(2, 5)

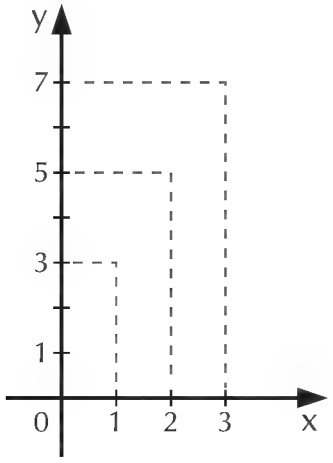
    c) E(9, −4) e F(1, −4)

23. O valor de *a* para que o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A(a, 1) e B(5, a) seja −2 é:

    a) 5 b) 1 c) 9 d) −5 e) −1

11. Equação da reta

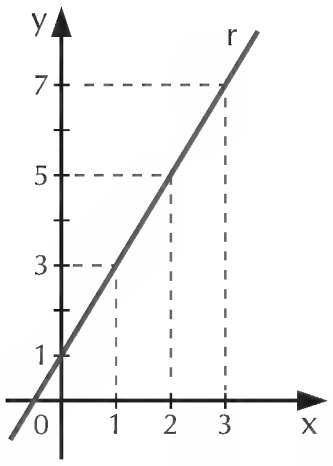
A equação da reta é determinada pela relação entre as abscissas e as ordenadas. Observe o exemplo:



x	y
0	1
1	3
2	5
3	7

Traçando a reta *r*, notamos que todos os pontos dessa reta obedecem à mesma lei:

$$y = 2x + 1$$



Essa função é definida por uma equação do 1º grau:

$2x - y + 1 = 0$, cujo gráfico é uma *reta.*

Assim, podemos afirmar que uma linha reta representa uma equação do 1º grau com duas variáveis (x e y) e que, dada uma reta *r*, podemos determinar a equação dessa reta.

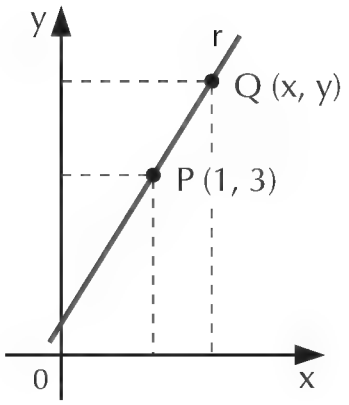
12. Determinando a equação da reta

12.1 Conhecendo um ponto e o coeficiente angular

Consideremos um ponto P(1, 3) e o coeficiente angular m = 2.

Dados $P(x_1, y_1)$ e $Q(x, y)$, com $P \in r$, $Q \in r$ e m a declividade da reta r, a equação da reta r será:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto P(4, 10) e tem coeficiente angular 3.

Resolução:

Temos: $m = 3$, $x_1 = 4$, $y_1 = 10$ e $Q(x, y)$.

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 10 = 3 \cdot (x - 4) \Rightarrow$

$y - 10 = 3x - 12 \Rightarrow -3x + y + 2 = 0 \Rightarrow 3x - y - 2 = 0$

2. Sabendo-se que uma reta tem uma inclinação de 45°, determine a equação da reta que passa pelo ponto P(5, −3).

Resolução:

Temos: $\alpha = 45°$, $x_1 = 5$, $y_1 = -3$ e $Q(x, y)$.

Como $\alpha = 45°$, então $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,45° = m$ e $\text{tg}\,45° = 1 \Rightarrow m = 1$.

Com isso, podemos calcular a equação da reta:

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow$

$y - (-3) = 1 \cdot (x - 5) \Rightarrow y + 3 = x - 5 \Rightarrow$

$x - 5 - y - 3 = 0 \Rightarrow x - y - 8 = 0$

12.2 Conhecendo dois pontos: $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

Consideremos os pontos A(1, 4) e B(2, 1).

Com essas informações, podemos determinar o coeficiente angular da reta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 4}{2 - 1} = -\frac{3}{1} = -3$$

Com o coeficiente angular, podemos utilizar qualquer um dos dois pontos para determinamos a equação da reta.

Temos A(1, 4), $m = -3$ e Q(x, y)

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 4 = -3 \cdot (x - 1) \Rightarrow$

$y - 4 = -3x + 3 \Rightarrow$

$3x + y - 4 - 3 = 0 \Rightarrow 3x + y - 7 = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

24. A equação de uma reta *r* que passa pelo ponto P(−1, 5) e tem uma inclinação de 60° é:

a) $x - \sqrt{3}\,y - (5 + \sqrt{3}) = 0$

b) $5x - y + (5 - \sqrt{3}) = 0$

c) $\sqrt{3}\,x + 5y - (5 + \sqrt{3}) = 0$

d) $\sqrt{3}\,x - y + (5 + \sqrt{3}) = 0$

e) $x - 5y + \sqrt{3} = 0$

25. (Fuvest-SP) Dados os pontos A(2, 3) e B(8, 5), determine a equação da reta que passa pelos pontos A e B.

26. (UFPB) A reta que passa pelos pontos (0, 3) e (5, 0) também passa pelo ponto

a) (5, 3)

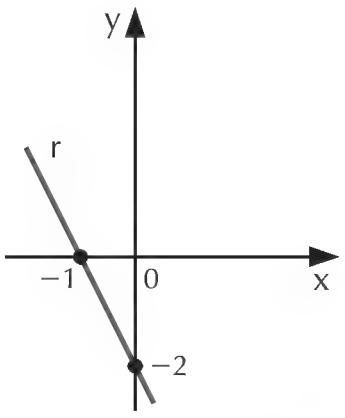
b) (3, 5)

c) (10, −3)

d) (0, 0)

e) (−13, 5)

27. (Mackenzie-SP) Determine a equação da reta *r* da figura ao lado.

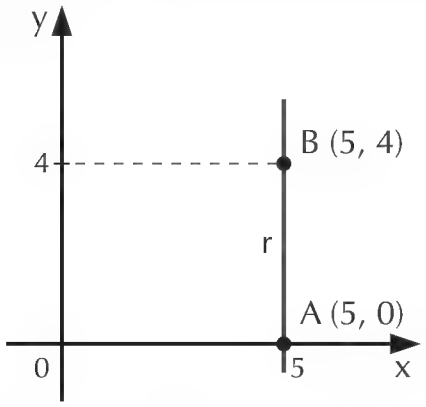


28. (PUC-SP) A equação da reta com coeficiente angular $m = -\frac{4}{5}$, e que passa pelo ponto P(2, −5), é:

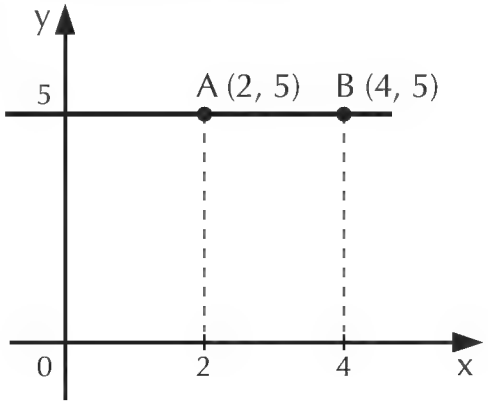
a) 4x + 5y + 12 = 0
b) 4x + 5y + 14 = 0
c) 4x + 5y + 15 = 0
d) 4x + 5y + 17 = 0
e) n.d.a.

29. Dados os gráficos abaixo, determine a equação das retas:

a)



b)



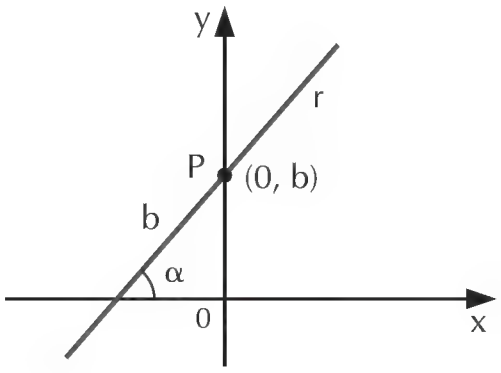
13. Equação reduzida da reta

A equação reduzida de uma reta *r* é determinada quando isolamos *y* na equação da reta y − b = mx, na qual o ponto P(0, b), b: coeficiente linear e m: coeficiente angular já são conhecidos.

Assim:

$$y = mx + b$$

é a equação reduzida da reta *r*.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine a forma reduzida da equação da reta que passa pelo ponto P(−3, 7) e tem declividade igual a 2.

Resolução:

Temos: $x_1 = -3$, $y_1 = 7$, $m = 2$ e $Q(x, y)$.

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 7 = 2 \cdot [x - (-3)] \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2x + 6 + 7 \Rightarrow \boxed{y = 2x + 13}$

2. Obtenha a forma reduzida da equação da reta que passa pelos pontos A(2, 1) e B(4, 6) e destaque o coeficiente angular e o coeficiente linear desta reta.

Resolução:

O coeficiente angular é dado por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 1}{4 - 2} = \frac{5}{2}$$

Obtemos então a equação reduzida.

Temos: $m = \frac{5}{2}$, $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ e $A(2, 1)$.

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 1 = \frac{5}{2} \cdot (x - 2)$$

$$y - 1 = \frac{5}{2}x - 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - 5 + 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{2}x - 4}$$

Coeficiente angular da reta: $\boxed{m = \frac{5}{2}}$

Coeficiente linear da reta: $\boxed{b = -4}$

3. Dada a equação da reta: $2x - 3y + 5 = 0$, escreva-a na forma reduzida e determine seus coeficientes angular e linear.

Resolução:

Para passarmos a equação dada para a forma reduzida, basta isolarmos o *y*:

$$2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow -3y = -2x - 5 \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$$

Portanto, o coeficiente angular desta reta é $m = \frac{2}{3}$ e o coeficiente linear, $b = \frac{5}{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

30. Escreva as formas reduzidas das equações da reta que passam pelos pontos:

a) A(2, 4) e B(1, 2)

b) A(1, 2) e B (4, 1))

c) A(−1, 8) e B(5, −4)

d) C(2, 3) e D(1, −1)

e) E(0, 4) e F(14, 4)

31. Determine as formas reduzidas das equações das retas a seguir, tais que:

a) A reta *r* passe pelo ponto P(−5, −3) e tenha uma declividade igual a 3.

b) A reta *s* passe pelo ponto Q(2, −7) e tenha uma declividade igual a $-\frac{1}{4}$.

32. Escreva as equações das retas abaixo, nas formas reduzidas:

a) $x + 2y - 3 = 0$

b) $3x - 7y + 5 = 0$

c) $5x - 10y - 1 = 0$

33. Dadas as equações das retas abaixo, determine os coeficientes angular e linear de cada uma delas:

a) $5x - 2y + 3 = 0$

b) $x - 4y + 9 = 0$

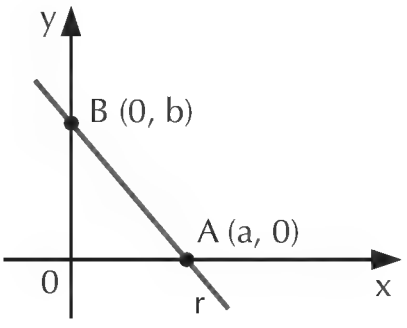
c) $7x + y - 5 = 0$

14. Equação segmentária da reta

É a equação da reta determinada pelos pontos da reta que interceptam os eixos *x* e *y* nos pontos A (a, 0) e B (0,b).

A equação segmentária é dada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



A seguir vejamos alguns exemplos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere a equação $3x + 4y - 12 = 0$ de uma reta *r*. Escreva a equação segmentária dessa reta.

Resolução:

Calculando os pontos de intersecção:

Se A(a, 0) é a intersecção da reta *r* com o eixo *x*, substituímos na equação dada: $x = a$ e $y = 0$.

Temos: $3x + 4y - 12 = 0 \Rightarrow 3 \cdot a + 4 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a - 12 = 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow$ Portanto: A(4, 0).

Se B(0, b) é a intersecção da reta *r* com o eixo *y*, substituímos na equação dada: $x = 0$ e $y = b$.

Temos: $3x + 4y - 12 = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 4 \cdot b - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4b = 12 \Rightarrow b = 3$

Portanto: B(0, 3)

A equação segmentária é dada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1}$$

2. Determine a equação segmentária da reta que passa pelos pontos A(3, 2) e B(−1, −6) e faça seu gráfico.

Resolução:

Calculando o coeficiente angular *m*:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{-6 - 2}{-1 - 3} \Rightarrow m = \frac{-8}{-4}$$

$$m = 2$$

A equação da reta fica da seguinte forma:

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 2 \cdot (x - 3)$

$y - 2 = 2x - 6 \Rightarrow 2x - 6 + 2 - y = 0$

$$2x - y - 4 = 0$$

Em seguida, calculemos os pontos de intersecção:

A′ (a, 0): substituímos $x = a$ e $y = 0$ na equação da reta

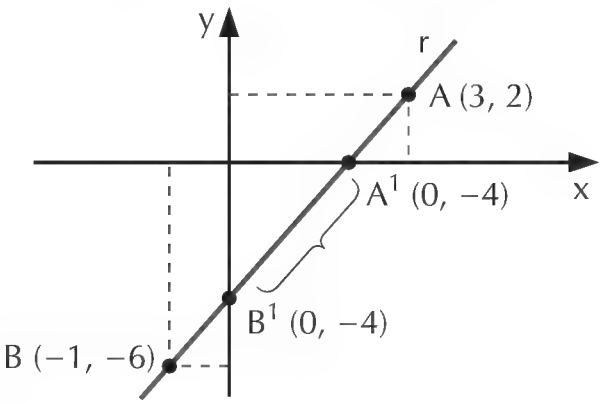
$2 \cdot a - 0 - 4 = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow$ Logo: A′ (2, 0)

B′(0, b): substituímos $x = 0$ e $y = b$ na equação da reta

$2 \cdot 0 - b - 4 = 0 \Rightarrow -b = 4 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow$ Logo: B′(0, −4)

Finalmente obtemos a segmentária da reta e o respectivo gráfico:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

34. Escreva as equações segmentárias das retas que passam pelos pontos a seguir:

a) A(5, 0) e B(0, 3)

b) C(−3, 0) e D(0, 2)

c) E(−4, 0) e F(0, −6)

d) G(2, 0) e H(0, −7)

35. A equação de uma reta é $2x - 5y + 10 = 0$; então a equação segmentária dessa reta é:

a) $-\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$

b) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$

c) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$

e) $\frac{x}{10} + \frac{y}{2} = 1$

15. Equação geral da reta

Toda equação de uma reta pode ser escrita na forma:

$$ax + by + c = 0$$

onde *a*, *b* e *c* são números reais constantes com *a* e *b* não simultaneamente nulos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine a equação geral de uma reta *r* que passa pelos pontos A(2, 3) e B(–1, 6) e trace seu gráfico.

Resolução:

Vamos determinar a equação geral dessa reta *r* de duas maneiras:

1ª) É a maneira como vínhamos trabalhando, ou seja, calculado o coeficiente angular.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{6 - 3}{-1 - 2} \Rightarrow m = \frac{3}{-3}$$

$$m = -1$$

Em seguida, a equação geral da reta:

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow$

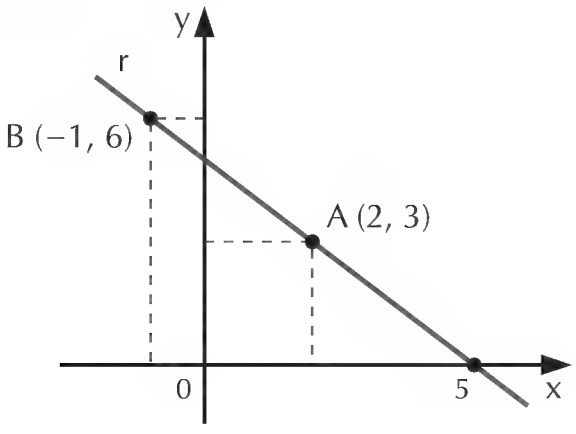
$y + x - 3 - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x + y - 5 = 0}$

equação geral da reta, onde:

$a = 1$, $b = 1$ e $c = -5$.

O coeficiente linear: $-\frac{c}{b} \Rightarrow \frac{-(-5)}{1} = 5$

Assim, graficamente temos:



2ª) Observando o gráfico da reta *r*, vamos considerar todos os pontos P(x, y) dessa reta (P ∈ r).

De acordo com a condição de alinhamento de três pontos (no caso P, A e B), temos o determinante que, calculado, irá nos dar a equação da reta:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad x + y - 5 = 0 \Rightarrow \text{ equação geral da reta}$$

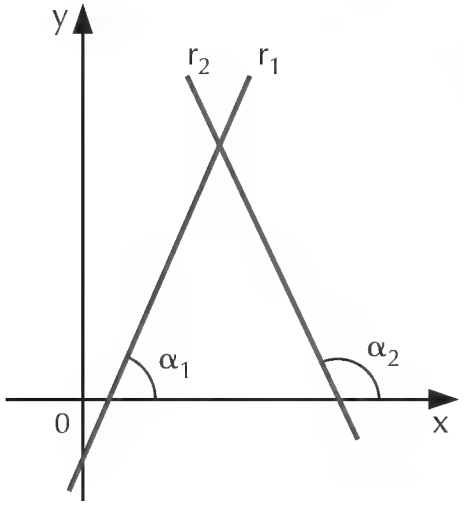
$$3x - y + 12 - 2y - 6x + 3 = 0$$

$$-3x - 3y + 15 = 0$$

16. Posições relativas de duas retas

Consideremos duas retas r_1 e r_2 do plano cartesiano. Em relação às suas posições, elas podem ser:

16.1 Retas concorrentes: $r_1 \times r_2$



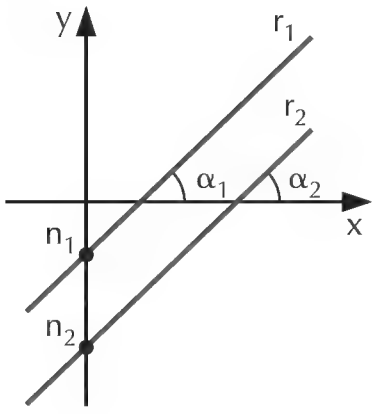
Se r_1 e r_2 são concorrentes, então seus ângulos formados com o eixo x são diferentes e, como conseqüência, seus coeficientes angulares são diferentes:

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \text{tg } \alpha_1 \neq \text{tg } \alpha_2$$

$$m_1 \neq m_2$$

16.2 Retas paralelas: $r_1 // r_2$

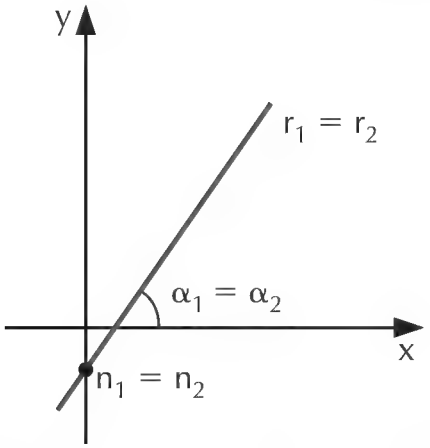
Se r_1 e r_2 são paralelas, seus ângulos com o eixo x são iguais e, em conseqüência, seus coeficientes angulares são iguais ($m_1 = m_2$),



$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_1 \neq \text{tg}\ \alpha_2$. Entretanto, para que sejam paralelas, é necessário que seus coeficientes lineares n_1 e n_2 sejam diferentes:

$$m_1 = m_2 \text{ e } n_1 \neq n_2$$

16.3 Retas coincidentes: $r_1 = r_2$



Se r_1 e r_2 são coincidentes, as retas cortam o eixo y no mesmo ponto; portanto, além de terem seus coeficientes angulares iguais, seus coeficientes lineares também serão iguais.

$$m_1 = m_2 \text{ e } n_1 = n_2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine a posição da reta r_1, cuja equação é: $6x + 7y + + 3 = 0$, em relação à reta r_2, de equação: $12x + 14y - 21 = 0$.

Resolução:

Devemos comparar os coeficientes angulares m_1 e m_2 das retas r_1 e r_2, respectivamente:

Calculando m_1 da reta r_1:

$$6x + 7y + 3 = 0 \Rightarrow 7y = -6x - 3 \Rightarrow y = -\frac{6x}{7} - \frac{3}{7}$$

Logo: $m_1 = -\frac{6}{7}$ e $n_1 = -\frac{3}{7}$

E agora, m_2 da reta r_2:

$$12x + 14y - 21 = 0 \Rightarrow 14y = -12x + 21$$

$$y = -\frac{12x}{14} + \frac{21}{14} \Rightarrow y = -\frac{6x}{7} + \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} m_2 = -\frac{6}{7} \\ n_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Como $m_1 = m_2 = -\frac{6}{7}$ e $n_1 = -\frac{3}{7} \neq \frac{3}{2} = n_2$, então, as retas r_1 e r_2 são paralelas.

2. Qual a posição da reta r_1 da equação $2x - y + 5 = 0$ em relação à reta r_2, de equação $5x + 2y - 10 = 0$?

Resolução:

Calculando m_1 da reta r_1:

$2x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2x + 5$

Logo: $m_1 = 2$ e $n_1 = 5$

E agora, m_2 da reta r_2:

$5x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow 2y = -5x + 10 \Rightarrow$

$$y = -\frac{5x}{2} + \frac{10}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2} + 5$$

Logo: $m_2 = -\frac{5x}{2}$ e $n_2 = 5$

Como $m_1 = 2 \neq -\frac{5}{2} = m_2$, logo, as retas r_1 e r_2 são concorrentes.

3. Classifique a posição da reta r_1 de equação $3x + 3y - 6 = 0$ em relação à reta r_2 de equação $x + y - 2 = 0$.

Resolução:

Calculando m_1 da reta r_1:

$3x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow 3y = -3x + 6 \Rightarrow y = -x + 2$

Logo: $m_1 = -1$ e $n_1 = 2$

E agora, m_2 da reta r_2:

$x + y - 2 = 0 \Rightarrow$

$y = -x + 2$

Logo: $m_2 = -1$ e $n_2 = 2$

Como $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$, então, as retas r_1 e r_2 são coincidentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36. Determine as posições relativas das retas abaixo:

a) r_1 em relação a r_2, sendo
$(r_1)\ 3x + 5y - 8 = 0$ e $(r_2)\ 9x + 15y + 7 = 0$

b) r_3 em relação a r_4, sendo $(r_3)\ -2x + y - 1 = 0$ e
$(r_4)\ 4x + 7y = 0$

c) r_5 em relação a r_6, sendo $(r_5)\ 9x + 6y - 4 = 0$ e
$(r_6)\ 6x + 4y + 3 = 0$

37. Dadas as retas $(r_1)\ 3x + uy = 7$ e $(r_2)\ 6x + 8y = v$, para que valores de u e v as retas são:

a) concorrentes. b) paralelas. c) coincidentes.

38. A equação da reta que passa pelo ponto $P(3, -1)$ e é paralela à reta de equação $x - 4y + 2 = 0$ é:

a) $3x - y - 2 = 0$
b) $x - 7y - 4 = 0$
c) $x - 3y - 2 = 0$
d) $x - 4y - 7 = 0$
e) $3x - y = 0$

17. Intersecção de retas

Duas retas, sendo concorrentes, apresentam um ponto de intersecção P(a, b), em que as coordenadas (a, b) devem satisfazer as equações de ambas as retas.

Para determinarmos as coordenadas de P, basta resolvermos o sistema constituído pelas equações dessas retas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Considere as retas r_1 e r_2 representadas pelas equações $2x - 3y - 1 = 0$ e $4x - 3y - 11 = 0$, e encontre o ponto em que elas se interceptam.

Resolução:

O ponto de intersecção P(a, b) será definido pelo sistema:

$$\begin{matrix} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 4x - 3y - 11 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$$

$$(-1) \cdot \begin{cases} -2x + 3y = -1 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$$

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

Substituindo esse valor em qualquer das equações, temos:

$$-2x + 3y = -1 \Rightarrow -2 \cdot 5 + 3y = -1 \Rightarrow -10 + 3y = -1$$

$$3y = -1 + 10 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$$

Portanto, o ponto de intersecção das retas *r1* e *r2* é P(5, 3).

18. Condição de perpendicularismo

Se duas retas, r_1 e r_2, são perpendiculares entre si, a seguinte relação deverá ser verdadeira

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

onde m_1 e m_2 são os coeficientes angulares das retas r_1 e r_2, respectivamente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verifique se as retas $(r_1)\ 7x - 4y + 5 = 0$ e $(r_2)\ 4x + 7y - 9 = 0$ são perpendiculares entre si.

Resolução:

Calculando o coeficiente angular de r_1:

$$7x - 4y + 5 = 0 \Rightarrow 4y = 7x + 5 \Rightarrow y = \frac{7}{4}x + \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$m_1 = \frac{7}{4}$$

E, em seguida, o coeficiente angular de r_2:

$$4x + 7y - 9 = 0 \Rightarrow 7y = -4x + 9$$

$$y = -\frac{4x}{7} + \frac{9}{7} \Rightarrow$$

$$m_2 = -\frac{4}{7}$$

Verificando agora a condição de perpendicularismo:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow \frac{7}{4} = \frac{-1}{-\frac{4}{7}} \Rightarrow \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

Como $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, logo: $r_1 \perp r_2$.

2. Calcule o valor de k para que as retas (r_1) $3x - 2y + 7 = 0$ e (r_2) $kx + 12y - 15 = 0$ sejam perpendiculares entre si.

Resolução:

Pela condição de perpendicularismo, temos que:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Calculando m_1:

$$3x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow 2y = 3x + 7 \Rightarrow y = \frac{3x}{2} + 7 \Rightarrow$$

$$m_1 = \frac{3}{2}$$

E agora, m_2:

$$kx + 12y - 15 = 0 \Rightarrow 12y = -kx + 15 \Rightarrow$$

$$y = -\frac{k}{12}x + \frac{15}{12} \Rightarrow m_2 = -\frac{k}{12}$$

Então k deverá ser:

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{-\frac{k}{12}} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{12}{k} \Rightarrow k = \frac{24}{3} \Rightarrow k = 8$$

Assim: $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow k = 8$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

39. (UFMG) Sejam r e s duas retas perpendiculares que se interceptam em $P = (1, 2)$. Se $Q = (-1, 6)$ pertence a uma dessas retas, então a equação da outra reta é:
a) $x + 2y - 5 = 0$
b) $x - 2y + 3 = 0$
c) $2x - y = 0$
d) $2x + y - 4 = 0$
e) $2x + 2y + 7 = 0$

40. (UFG-GO) As equações das retas r, s e t são $2x + 3y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$ e $x - 2y + 1 = 0$, respectivamente. A reta perpendicular a t, que passa pelo ponto de intersecção das retas r e s, tem por equação:
a) $2x + y - 2 = 0$
b) $2x + y + 11 = 0$
c) $2x + y + 5 = 0$
d) $x - 2y + 10 = 0$
e) $x - 2y - 11 = 0$

41. (UFC-CE) Seja $P_1(x_1, y_1)$ o ponto de intersecção das retas $x - y = 2$ e $x + y = 12$. A reta que passa por $P_1(x_1, y_1)$ e tem inclinação intercepta a reta de equação $x = 0$ no ponto:
a) $(0, -3)$ b) $(0, -2)$ c) $(0, 2)$ d) $(0, 3)$

42. (Fuvest–SP) São dados os pontos $A(2, 3)$ e $B(8, 5)$. Determine a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

43. (PUC-SP) As retas $2x + 3y = 1$ e $6x - ky = 1$ são perpendiculares. Então, k vale:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

44. (UFSC) Calcule o valor de p para que as retas r, dada pela equação $(2p + 1)x + 3y - 12 = 0$, e s, dada pela equação $3x - 37y + 3 = 0$, sejam perpendiculares entre si.

19. Distância entre um ponto e uma reta

A distância de um ponto a uma reta é a medida do segmento perpendicular que liga o ponto à reta.

Esse valor pode ser obtido com a aplicação da seguinte expressão matemática:

$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

onde $d(P, r)$ é a distância entre o ponto $P(x_P, y_P)$ e a reta r.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine a distância do ponto $P(2, 3)$ à reta r de equação $3x - y - 17 = 0$.

Resolução:

Temos: $a = 3$, $b = -1$, $c = -17$

$P(x_p, y_p) = P(2, 3)$

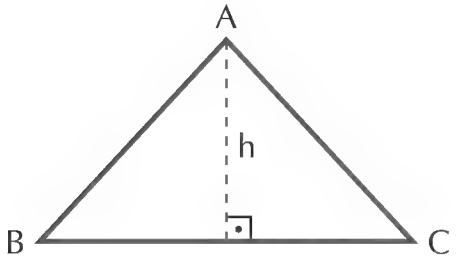
$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot (3) + (-17)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} =$$

$$d(P, r) = \frac{|6 - 3 - 20|}{\sqrt{10}} = \frac{|-14|}{\sqrt{10}} = \frac{14 \cdot \sqrt{10}}{10} = \frac{7 \cdot \sqrt{10}}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(P, r) = \frac{7\sqrt{10}}{5}$$

2. Determine a altura relativa ao vértice A de um triângulo cujos vértices são os pontos A(−2, 5), B(2, 8) e C(0, 4).

Resolução:



O problema consiste em determinar a distância do ponto A à reta $\overleftrightarrow{BC}$. Como B e C são colineares, então:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x + 8 - 2y - 4x = 0 \Rightarrow 4x - 2y + 8 = 0$$

$$2x - y + 4 = 0 \Rightarrow \text{equação da reta } \overleftrightarrow{BC}$$

Com esses dados, podemos calcular a altura (h), onde A(−2, 5):

$$d(A, \overleftrightarrow{BC}) = \frac{|a \cdot x_p + b \cdot y_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

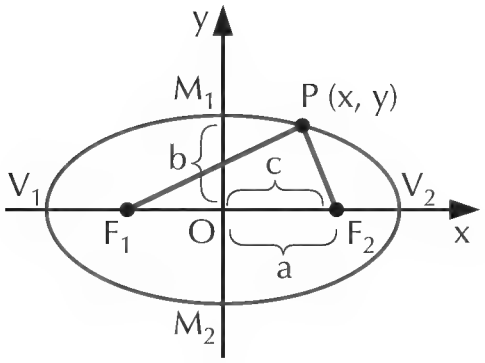
$$d(A, \overleftrightarrow{BC}) = \frac{|2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (5) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|-4 - 5 + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{d(A, \overleftrightarrow{BC}) = \sqrt{5}}$$

20. Definição de elipse

Elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos do plano é constante.

Onde F_1 e F_2 são focos:



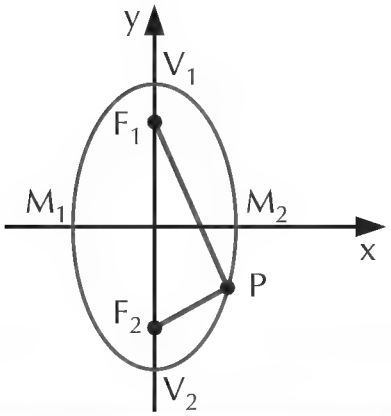
$\overline{F_1F_2}$ = 2c é a distância focal;

V_1 e V_2 são vértices;

$\overline{V_1V_2}$ = 2a é o eixo maior;

$\overline{M_1M_2}$ = 2b é o eixo menor da elipse;

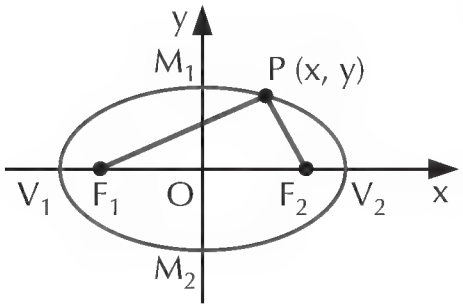
O é o centro da elipse.



Observe que, mesmo que mudemos o eixo maior da elipse do eixo *x* para o eixo *y*, a relação de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$) continua sendo válida:

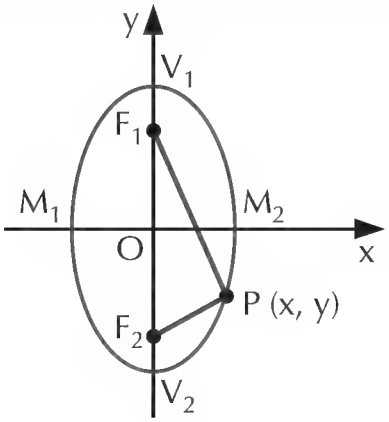
21. Equações da elipse

a) Centrada na origem e com o eixo maior na horizontal:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b) Centrada na origem e com o eixo maior na vertical:



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine a equação da elipse de focos $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$ e vértices $V_1(-7, 0)$ e $V_2(7, 0)$.

Resolução:

Os focos estão no eixo *x*, pois as ordenadas são iguais a zero; logo, usaremos a fórmula:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Temos: $c = 3$, $a = 7$.

Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular b^2:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 7^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b^2 = 49 - 9 \Rightarrow$$

$$b^2 = 40$$

Substituindo b^2 na fórmula, temos:

$$\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{40} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{40} = 1 \Rightarrow 40x^2 + 49y^2 = 1.960$$

Logo, a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{40} = 1 \text{ ou } 40x^2 + 49y^2 = 1.960$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

45. (FAAP-SP) Escreva a equação da elipse que tem focos $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$ e cujos vértices são $A_1(5, 0)$ e $A_2(-5, 0)$.

46. A equação da elipse cujos focos são $F_1(0, -1)$ e $F_2(0, 1)$ e cujos vértices são $A_1(0, -4)$ e $A_2(0, 4)$ é:

a) $16x^2 + 15y^2 = 240$

b) $15x^2 + 16y^2 = 240$

c) $x^2 + 15y^2 = 15$

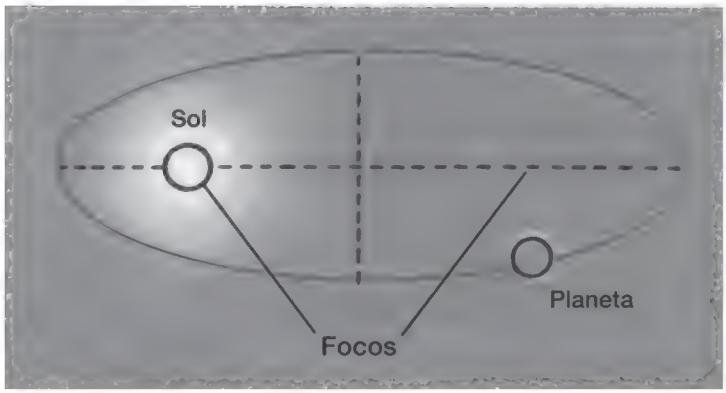
d) $15x^2 + y^2 = 15$

e) $4x^2 + y^2 = 0$

Aplicação Prática

Órbitas dos corpos celestes

Órbita é a trajetória seguida por um planeta, satélite, asteróide ou cometa. As órbitas dos planetas são aproximadamente elípticas e são descritas pelas *leis de Kepler*. Johannes Kepler (1571-1630), astrônomo alemão, foi o primeiro a descrever as órbitas da Terra e dos planetas em torno do Sol.

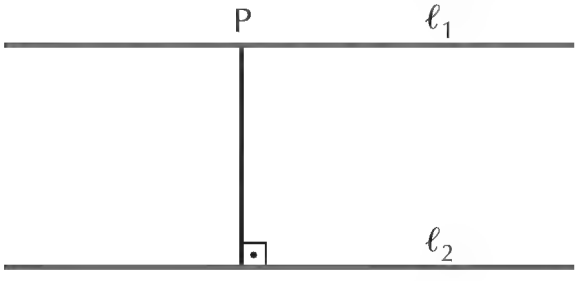


47. (PUC-SP) Determine a distância do ponto Q(1, 1) à reta t cuja equação é $x + y - 3 = 0$.

48. (PUC-SP) A altura do triângulo ABC, relativa ao vértice A, onde A(3, 2), B(1, −3) e C(−4, −1) é:

a) $\sqrt{29}$ b) $3\sqrt{29}$ c) $\frac{\sqrt{29}}{2}$ d) $2\sqrt{29}$ e) $\frac{\sqrt{29}}{3}$

49. (Cescem-SP) Calcule a distância entre as retas ℓ_1, de equação $3y = 4x - 2$, e ℓ_2, de equação $3y = 4x + 8$, sabendo que $\ell_1 // \ell_2$.

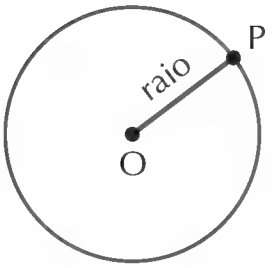


(*Sugestão*: Fazendo $x = 0$ na equação da reta ℓ_1, obtemos um certo valor para y; em seguida, basta calcular a distância de P(0, y) à reta ℓ_2).

50. (Cesgranrio-RJ) O ponto A(−1, −2) é um vértice de um triângulo eqüilátero ABC cujo lado $\overline{BC}$ está sobre a reta de equação $x + 2y - 5 = 0$. Determine a medida h da altura desse triângulo.

22. Definição de circunferência

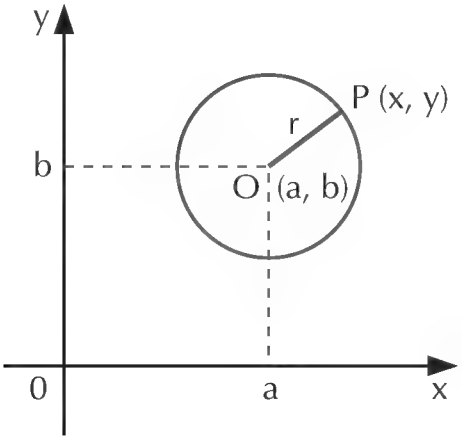
Circunferência é o conjunto dos pontos do plano eqüidistantes de um ponto fixo O, denominado *centro da circunferência*.



A medida da distância de qualquer ponto da circunferência ao centro O é sempre constante e é denominada *raio*.

23. Equação reduzida da circunferência

Dados um ponto P(x, y) qualquer, pertencente a uma circunferência de centro O(a,b) e raio *r*, sabemos que: d(O,P) = r.



A equação reduzida da circunferência expressa a distância entre os pontos O e P, por meio de suas coordenadas.

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Assim, temos que um ponto P(x, y) qualquer da circunferência só pertencerá à circunferência se, e somente se, a distância d(P, O), sendo O o centro da circunferência de coordenadas O(a, b), for igual ao raio *r*.

Elevando ambos os membros dessa equação ao quadrado:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Escreva as equações reduzidas das circunferências de centro O e raio r, nos seguintes casos:

   a) O(2, 5) e r = 7

   b) O(0, 4) e r = 5

   c) O(0, 0) e r = 3

   d) O(−2, −3) e r = $\sqrt{7}$

Resolução:

a) Pela equação reduzida da circunferência, temos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, onde a = 2 e b = 5:

$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$

b) $(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 25$

c) O centro da circunferência está na origem, então:

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

d) $[x - (-2)]^2 + [y - (-3)]^2 = (\sqrt{7})^2 \Rightarrow$

$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 7$

2. Escreva o centro O e o raio das circunferências a seguir, dadas as equações das circunferências:

   a) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

   b) $(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 81$

   c) $x^2 + (y + 2)^2 = 5$

   d) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

Resolução:

a) Se $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

representa a equação de uma circunferência, temos que:

O(1, 3) → centro da circunferência

$\sqrt{16} = 4$ → raio da circunferência

b) O(−7, 4) e r = 9

c) O(0, −2) e r = $\sqrt{5}$

d) O(2, 0) e r = 1

3. Seja (α) uma circunferência cuja equação é $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 100$. Verifique se:

   a) P(8, −5) pertence a (α);

   b) Q(3, 2) pertence a (α);

   c) (α) passa pela origem.

Resolução:

a) Fazendo $x = 8$ e $y = -5$ e substituindo esses valores na equação de (α), temos:

$(8 - 2)^2 + (-5 - 3)^2 = 100 \Rightarrow 6^2 + (-8)^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow 100 = 100$

Portanto, $P(8, -5) \in (\alpha)$.

b) Fazendo $x = 3$ e $y = 2$ e substituindo esses valores na equação de (α), temos:

$(3 - 2)^2 + (2 - 3)^2 = 1^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2 \neq 100$

Logo, $Q(3, 2) \notin (\alpha)$

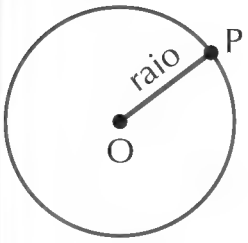
c) Se (α) passa pela origem, então P(0, 0) pertence a (α); então, fazendo $x = 0$ e $y = 0$ e substituindo esses valores na equação de (α), temos:

$(0 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13 \neq 100$

Logo, (α) não passa pela origem.

4. Obtenha a equação da circunferência com centro no ponto O(7, 10) e que passa pelo ponto P(10, 14).

Resolução:



Temos que o raio dessa circunferência é $r = d(O, P)$.

Logo, pela fórmula da distância, temos:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(10 - 7)^2 + (14 - 10)^2} \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 5$$

E a equação da circunferência de centro O(7, 10) e r = 5, é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 7)^2 + (y - 10)^2 = 25$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

51. Escreva as equações reduzidas das circunferências de centro O e raio *r*, nos seguintes casos:

a) O(1, 5) e r = 2

b) O(−3, 2) e r = 6

c) O(4, −5) e r = 3

d) O(−1, −2) e $r = \sqrt{5}$

e) O (0, 0) e r = 8

f) O (0, −5) e $r = 2\sqrt{2}$

g) O(3, 0) e r = 1

52. Escreva o centro O e o raio das circunferências abaixo, dadas as equações das circunferências.

a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$

b) $(x + 7)^2 + (y + 1)^2 = 4$

c) $(x - 3)^2 + y^2 = 16$

d) $x^2 + (y - 1)^2 = 100$

e) $x^2 + y^2 = 6$

f) $(x + 4)^2 + y^2 = 81$

53. Verifique se o ponto P(−4, 1) pertence a uma circunferência (α) cuja equação é: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ e se (α) passa pela origem.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

54. (UFPB) A equação da circunferência que passa pelos pontos A = (1, 2) e B = (3, 6) e cujo centro é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é:

a) $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 1$

b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$

d) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 1$

e) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$

55. (FEI-SP) Determine a equação da circunferência com centro no ponto C(2,1) e que passa pelo ponto A(1,1).

56. (PUC−SP) O ponto P(−3, b) pertence à circunferência de centro no ponto C(0, 3) e de raio r = 5. Calcule o valor de *b*.

57. (FGV-SP) Determine a equação da reta que passa pelo centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ e é paralela à reta r, de equação $2x + 3y = 0$.

58. (FMU-SP) Uma circunferência tem centro C(4, 3) e passa pela origem. A equação desta circunferência é:

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 25$

d) $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

e) $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$

59. (Mackenzie-SP) Determine a equação de uma circunferência cujo diâmetro é o segmento de extremidades A(2, 8) e B(4, 0).

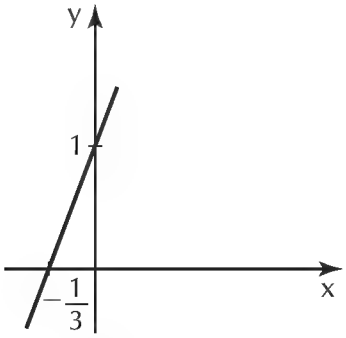
Leia sobre Os cristais e suas formas geométricas no Encarte Colorido.

GABARITO

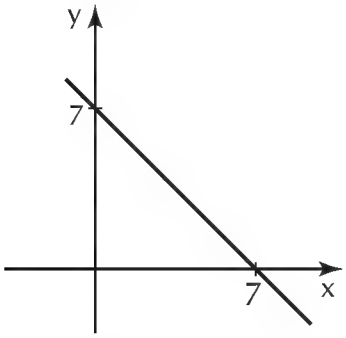
Capítulo 1 – Função do 1º Grau

1. a) $k \neq -2$
   b) $k \neq 4$
   c) $k \neq \pm 5$
   d) $k \neq \pm 3$
   e) $k \neq 0$
   f) $k \neq 6$

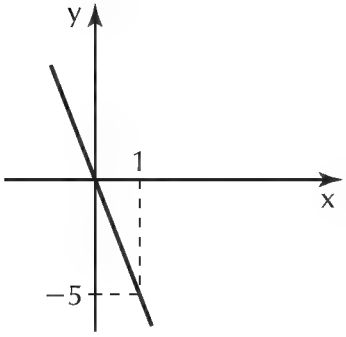
2. a)



b)



c)



3. $y = 2x - 2$

4. a) $y = -\frac{3}{2}x + 3$

   b) $y = \frac{1}{3}x - 2$

5. a) $y = 2$
   b) $y = -x$
   c) $y = x - 4$

6. a) $S = \{7\}$
   b) $S = \{-3\}$
   c) $S = \{14\}$
   d) $S = \{-3\}$
   e) $S = \{-15\}$

7. $k = 36$

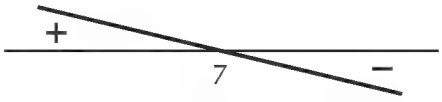
8. $p = \frac{1}{10}$

9. a) $m > -3$
   b) $m > -\frac{5}{2}$

10. a) $p < 27$
    b) $p < -7$

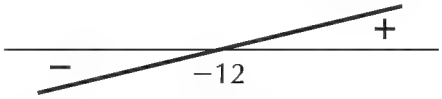
11. $S = \{3\}$

12. a)



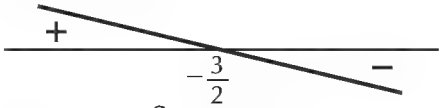
se $x = 7$ então $y = 0$; se $x > 7$, então $y < 0$; se $x < 7$, então $y > 0$

b)



se $x = -12$, então $y = 0$;
se $x > -12$, então $y > 0$;
se $x > -12$, então $y < 0$

c)

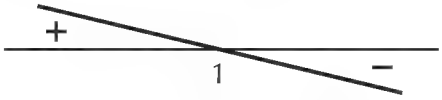


se $x = -\frac{3}{2}$, então $y = 0$;

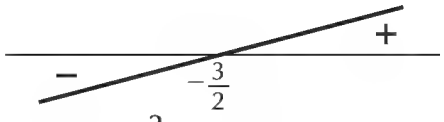
se $x > -\frac{3}{2}$, então $y < 0$;

se $x < -\frac{3}{2}$, então $y > 0$

d)



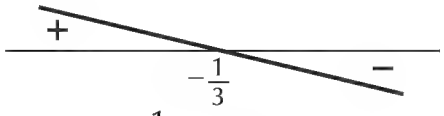
se $x = 1$, então $y = 0$;
se $x > 1$, então $y < 0$;
se $x < 1$, então $y > 0$

e) 

se $x = -\frac{3}{2}$, então $y = 0$;

se $x > -\frac{3}{2}$, então $y > 0$;

se $x < -\frac{3}{2}$, então $y > 0$

f) 

se $x = -\frac{1}{3}$, então $y = 0$;

se $x > -\frac{1}{3}$, então $y < 0$;

se $x < -\frac{1}{3}$, então $y > 0$

13. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 15\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{85}{4}\right\}$
f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{6}{15}\right\}$

14. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 7\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq \frac{1}{3}\right\}$
c) $S = \{-2\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

15. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x \geq \frac{7}{2}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} \leq x < 0\right\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -9 \text{ ou } x \geq 0\}$

16. c 17. e

18. 4 e 2 ou 4 e −2

19. 13 20. e 21. b 22. b

23. c 24. b 25. 82 26. e

Capítulo 2 – Função do 2º Grau

1. a) $k \neq 1$ c) $k \neq 5$
b) $k \neq -35$ d) $k \neq 0$

2. a) $S = \{-1\}$ e) $S = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right\}$
b) $S = \varnothing$ f) $S = \{-1, 9\}$
c) $S = \{0, 2\}$ g) $S = \{-6, 1\}$
d) $S = \varnothing$

3. $k < \frac{1}{8}$ 4. $m = \pm 1$ 5. $p > 4$

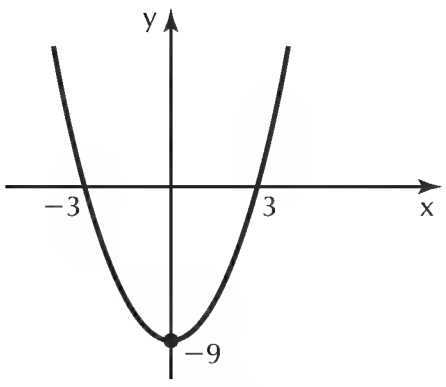
6. a) ① $p > 2$; ② $p < 2$
b) ① $p > -18$; ② $p < -18$
c) ① $p > -23$; ② $p < -23$
d) ① $p < 6$; ② $p > 6$

7. a) ① $\Delta > 0$
② -1 e 1
③ -2

c) ① $\Delta > 0$
② 1 e 5
③ -9

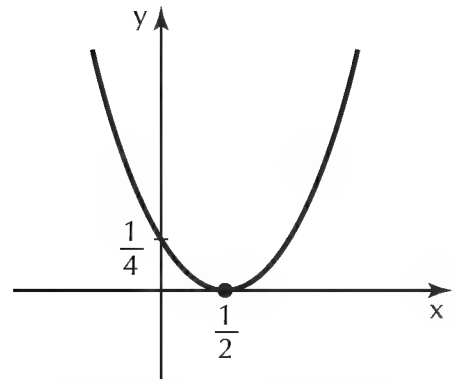
b) ① $\Delta = 0$
② $x = 2$
③ 3

8. a) (1, 0) d) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{17}{4}\right)$
b) $\left(-\frac{1}{12}, \frac{191}{48}\right)$ e) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$
c) $\left(\frac{1}{10}, \frac{19}{20}\right)$

9. a) 

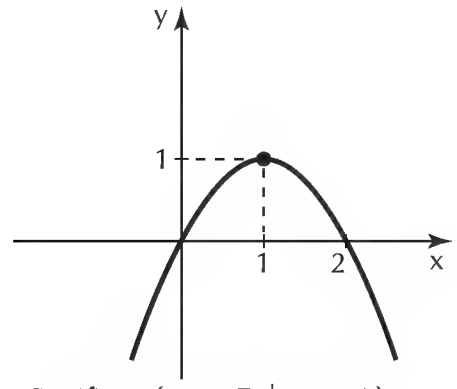
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -9\}$

b)



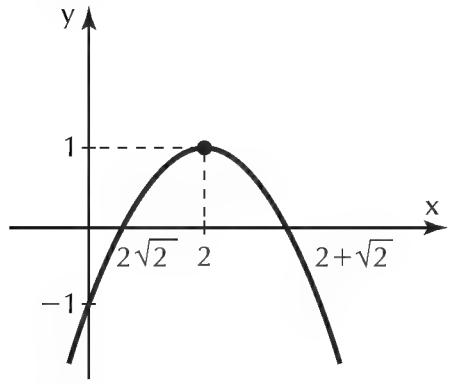
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

c)



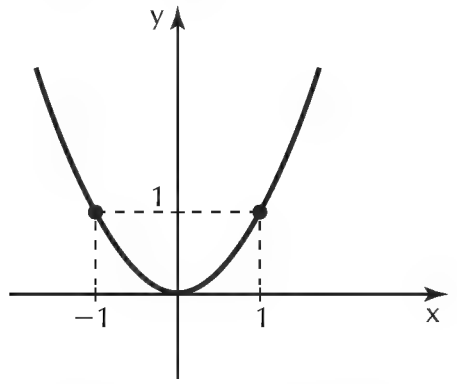
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$

d)



$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$

e)



$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

10.51

11. a) • $x < \frac{1-\sqrt{10}}{3}$ ou

• $x > \frac{1+\sqrt{10}}{3} \Rightarrow y > 0$

• $x = \frac{1\pm\sqrt{10}}{3} \Rightarrow y = 0$

• $\frac{1-\sqrt{10}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{10}}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow y < 0$

b) • $x < -4$ ou $x > 4 \Rightarrow y < 0$
• $x = \pm 4 \Rightarrow y = 0$
• $-4 < x < 4 \Rightarrow y > 0$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow y < 0$

d) $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow y > 0$

e) • $x < -\frac{1}{3}$ ou $x > 1 \Rightarrow y < 0$
• $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 1 \Rightarrow y = 0$
• $-\frac{1}{3} < x < 1 \Rightarrow y > 0$

f) • $x = 0 \Rightarrow y = 0$
• $\forall\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \Rightarrow y < 0$

g) • $x = 0 \Rightarrow y = 0$
• $\forall\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \Rightarrow y > 0$

12. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 8\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \varnothing$ d) $S = \varnothing$ e) $S = \mathbb{R}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4$ ou $x \geqslant 1\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}\right\}$

13. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2-\sqrt{5}$ ou
$0 < x < 4$ ou $x > 2+\sqrt{5}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{3}$ ou
$-\frac{1}{2} < x < 0$ ou $x > \frac{10}{3}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3$
ou $-2 < x \leqslant 3$ ou $x > 4\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

14.a 15.b 16.b 17.48

18.e 19.15 20.b 21.a

22.b 23.c 24.29 25.c

26.a 27.b 28.a 29.e

Capítulo 3 – Função Modular

1.a) 15 c) 7,3 e) 81

b) 204 d) 16,1 f) 12,5

2. a) $|5x| = \begin{cases} 5x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -5x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

b) $|-3x| = \begin{cases} -3x, \text{ se } x \leqslant 0 \\ 3x, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

c) $|2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4, \text{ se } x \geqslant -2 \\ -2x - 4, \text{ se } x < -2 \end{cases}$

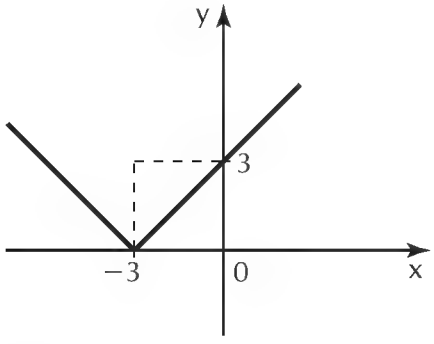
d) $|-x + 7| = \begin{cases} -x + 7, \text{ se } x \leqslant 7 \\ x - 7, \text{ se } x > 7 \end{cases}$

e) $|4x - 16| = \begin{cases} 4x - 16, \text{ se } x \geqslant 4 \\ -4x + 16, \text{ se } x < 4 \end{cases}$

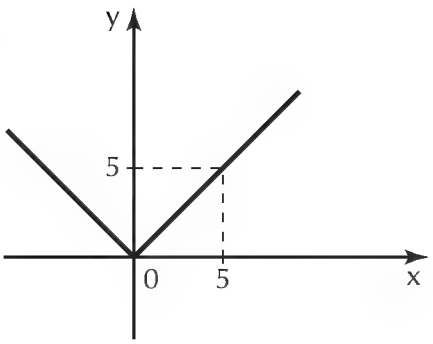
f) $|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } x \leqslant -2 \text{ ou } x > 2 \\ -x^2 + 4, \text{ se } -2 < x < 2 \end{cases}$

g) $|-7x - 35| = \begin{cases} -7x - 35, \text{ se } x \leqslant -5 \\ 7x + 35, \text{ se } x > -5 \end{cases}$

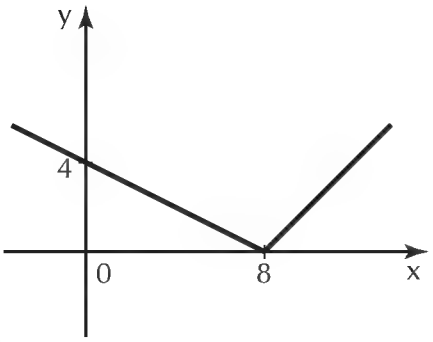
3.a)



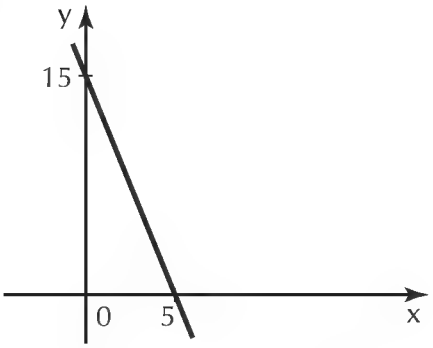
b)



c)



d)



4.a) $S = \{-4, 4\}$ e) $S = \varnothing$

b) $S = \{-4, 4\}$ f) $S = \left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$

c) $S = \{-7, 15\}$ g) $S = \varnothing$

d) $S = \{1, 6\}$ h) $S = \left\{-\frac{7}{3}, 3\right\}$

5.a) $S = \{-7, -2, 2, 7\}$

b) $S = \{-9, 9\}$

c) $S = \{-6, -5, 5, 6\}$

d) $S = \{-1, 1\}$

e) $S = \varnothing$

6.a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -12 \text{ ou } x \geqslant 12\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 7\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{25}{9} \text{ ou } x > 3\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -10 \text{ ou } x \geqslant 6\}$

f) $S = \mathbb{R}$

g) $S = \varnothing$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$

i) $S = \mathbb{R}$

j) $S = \varnothing$

7. b 8. c 9. b 10. d

11. d 12. c 13. d 14. c

15. a 16. a

Capítulo 4 – Função Exponencial

1. a) $S = \{2\}$
   b) $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$
   c) $S = \{3\}$
   d) $S = \{3 -3\}$
   e) $S = \{4\}$
   f) $S = \{-4\}$

2. a) $S = \{3\}$
   b) $S = \{1\}$
   c) $S = \{2\}$

3. a) $S = \{0, 1\}$
   b) $S = \{1, 3\}$
   c) $S = \{2\}$
   d) $S = \varnothing$

4. $S = \{0, 2\}$

5. a) crescente
   b) decrescente
   c) crescente
   d) crescente
   e) crescente
   f) decrescente

6. a) $a > -\frac{11}{2}$
   b) $a < 1$
   c) $a > 40$

7. a) $-27 < k < -24$
   b) $4 < k < 5$
   c) $9 < k < \frac{64}{7}$

8. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$
   b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$
   c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
   d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
   e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{5}\right\}$
   f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
   g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -14\}$
   h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{5}{2}\right\}$

9. b

10. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

11. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
    b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$
    c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

12. c 13. d 14. d 15. 42

16. 40 17. 17 18. e 19. d

20. e 21. c 22. 4 23. e

24. c 25. 13 26. c

Capítulo 5 – Função Logarítmica

1. a) 7
   b) 3
   c) 3
   d) -4
   e) -2
   f) $\frac{1}{4}$
   g) $\frac{3}{4}$
   h) 4

2. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3$
   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2$
   c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5$
   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3} \text{ e } x \neq 1\}$

3. a) 6 d) 3 g) 2 j) 20
   b) 3 e) 3 h) 2 l) 9
   c) 0 f) 5 i) 0

4. a) $x = 64$
   b) $x = 32$
   c) $x = 100$
   d) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
   e) $x = 242$

5. $k = \frac{31}{4}$

6. a) 2,37475 e) 1,72428
b) −0,30103 f) −0,04576
c) 1,96848 g) 2,62221
d) 2,96142

7. a) $5 \log m + 2 \log n - \frac{2}{3} \log p$

b) $\frac{1}{2} \log r - 4 \log s - \log t$

8. a) 1,477 c) 1,38
b) 1,255

9. e 10. a 11. c

12. a) $k > -3$ c) $k > -\frac{11}{3}$

b) $8 < k < 9$ d) $\frac{1}{5} < k < \frac{2}{5}$

13. a) $S = \{8\}$ d) $S = \{4\}$
b) $S = \{-2\}$ e) $S = \varnothing$
c) $S = \varnothing$

14. a) $S = \{8\}$ c) $S = \{83\}$

b) $S = \{16\}$ d) $S = \left\{0, \log_3 \frac{3}{2}\right\}$

15. $S = \{99\}$ 16. $S = \{4\}$

17. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 7\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{5}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 4\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{5}{2}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 19\}$

18. a 19. a 20. 17 21. d

22. c 23. b 24. e 25. e

26. c 27. e 28. e 29. e

30. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 5 \text{ e } x \neq 2\}$

Capítulo 6 – Funções Circulares-Trigonometria

1. a) $\text{sen } \hat{B} = \frac{4}{5}$, $\text{sen } \hat{C} = \frac{3}{5}$

$\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$, $\cos \hat{C} = \frac{4}{5}$

$\text{tg } \hat{B} = \frac{4}{3}$, $\text{tg } \hat{C} = \frac{3}{4}$

b) $\text{sen } \hat{B} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\text{sen } \hat{C} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos \hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \hat{C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg } \hat{B} = 2$, $\text{tg } \hat{C} = \frac{1}{2}$

2. $\text{sen } 15° = 0{,}26$
$\cos 15° = 0{,}97$
$\text{tg } 15° = 0{,}27$

3. $\text{sen } 27° = 0{,}45$
$\text{sen } 63° = 0{,}89$

4. a) 13 d) $\sqrt{17}$
b) $4\sqrt{21}$ e) $\sqrt{7}$
c) 3 f) 15

5. 15 cm e 20 cm 6. 5 cm

7. a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $8\sqrt{3}$ c) 6

8. e 9. e 10. c

11. b 12. b 13. b

14. a) 43,96 cm c) 10,88 m
b) 75,36 cm

15. $r = 2$ cm 16. 9 m 17. 20

18. 1.004,8 km
$t \simeq 4$ h

19. a) $\frac{2\pi}{3}$ rad c) $\frac{23\pi}{18}$ rad

b) $\frac{23\pi}{18}$ rad d) $\frac{3\pi}{4}$ rad

20. a) 210° b) 225° c) 240° d) 330°

21. c 22. c

23. a) $\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

24. a) $\frac{7\pi}{6}$ rad c) $\frac{5\pi}{3}$ rad

b) $\frac{4\pi}{3}$ rad d) $\frac{3\pi}{4}$ rad

25. a) 320° c) $\frac{5\pi}{4}$ rad

b) 132° d) zero

26. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

27. $\sqrt{2} - 4$

28. a) $-3 \leq m \leq 0$ b) $-1 \leq m \leq 9$

29. a) $-\frac{1}{2}$ c) 0 e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) -1 d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

30. $\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ 31. c

32. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 33. $-\frac{3}{4}$ 34. $\frac{3}{4}$

35. m = 2 ou m = −1

36. a) 1 c) $-\sqrt{3}$ e) $\nexists$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) -1 f) 1

37. A = $\frac{1}{2}$ 38. c

39. a) −1 b) 2 c) −1

40. 1 41. 84

42. a) tg α b) cotg α

43. sen x = 1 ou sen x = $-\frac{4}{5}$

44. cos x = $\frac{1}{2}$ e cos x = 1

45. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \{0, \pi, 2\pi\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

h) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

46. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$

f) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

47. d 48. e 49. 0

50. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

51. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi < x < 2\pi\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right\}$

52. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

53. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \pi\}$

54. $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi\right\}$

55. $\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$,

$\cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

$\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3}$

56. $\sec 105° = -\sqrt{2} - \sqrt{6}$,

$\text{cossec } 105° = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

57. a) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ b) $\frac{\left(3\sqrt{3} + 4\right)}{10}$ c) -7

58. $A = 2 + \sqrt{2}$

59. a) 2π c) $\frac{2\pi}{5}$ e) 4π g) 2π

b) 2π d) $\frac{\pi}{2}$ f) 6π

60. d 61. 3 cm 62. d

63. c 64. 35 m 65. a

66. d 67. c 68. d

69. 13 70. d 71. c

72. b 73. d 74. e

75. b 76. e

Capítulo 7 – Seqüências e Progressões

1. a) (3, 8, 13, 18, 23, ...)

b) $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right)$

c) (−1, −2, −4, −8, ...)

2. a) r = 4 (crescente)

b) r = −5 (decrescente)

c) $r = \frac{1}{3}$ (crescente)

d) r = 0 (constante)

e) $r = -\sqrt{3}$ (decrescente)

f) r = 0 (constante)

3. $m = 6$

4. $\left(-2, -\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

5. $(-1, 3, 7)$ 6. $(6, 4, 2)$

7. a) 10 b) 193 c) 73

8. $r = 10$ 9. 63 10. 17

11. (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47)

12. 4 13. 128

14. 112 15. $S_{12}=114$

16. $S_{25} = -1.025$ 17. $S_{20} = 175$

18. 16 19. 24 20. e

21. (3, 6, 9, 12, ...) 22. 1.986

23. a) -3 b) $\frac{1}{5}$ c) $\sqrt{7}$ d) 4

24. $p = \frac{1}{16}$ 25. $(-1, -6, -36)$

26. $(-4, -2, -1)$ 27. $(9, 3, 1)$

28. a 29. $\frac{1}{243}$

30. 1.024 31. $\sqrt{2}$

32. $343\sqrt{7}$ 33. 16

34. $\frac{1.023}{512}$ 35. -1.092

36. $a_1 = 1$ 37. 6 38. Sétimo

39. a) $\frac{5}{3}$ c) 4 b) $\frac{1}{3}$

40. 10 41. $-\frac{1}{2}$

42. b 43. b

44. 61 45. c

46. 91 47. 16 filas

48. a 49. b

50. d 51. b

52. b 53. e

Capítulo 8 – Matrizes e Determinantes

1. $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 15 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

2. $C = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $x = 3$ e $y = 1$

4. $x = -6$, $y = 2$ e $z = 11$

5. a) $\begin{bmatrix} \frac{25}{6} & \frac{13}{10} \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{19}{6} & \frac{7}{10} \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$

6. d

7. $X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ 9. 32

10. 80 11. 89 12. a

13. a) 5 b) 14 c) $\sqrt{2}$

14. a) -3 b) 7 c) -1

15. a

16. a) 15 b) -85

17. d 18. 0 19. b

20. 100 21. e 22. a

23. b

24. 0, pois possui uma coluna com zeros.

25. e 26. a

Capítulo 9 – Sistemas Lineares

1. b, d, e
2. $k = 3$
3. a) É linear.
   b) Não é linear.
   c) É linear.
   d) Não é linear.
4. a, c
5. (1, 0, 1) é solução, mas (0, −3, 1) não é solução.
6. $k = -5$
7. a) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

8. a) $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$
      $3x_1 - 3x_2 = 0$
      $-x_1 + 2x_3 = 0$

   b) $3y = 3$
      $2x = 4$

9. 56
10. c
11. d
12. (1, 2)
13. 2
14. c
15. d
16. $k = 42$
17. d
18. d
19. 14
20. 1.446
21. a) 720
    b) 2.160
22. 48
23. a) 6
    b) 1
    c) 1
24. 232
25. $S = \{10\}$
26. 8 pessoas
27. 5.040
28. a) 10
    b) 125
29. a) 19
    b) 35
30. 4.512
31. a) 151.200
    b) 1.260
32. 30
33. 20
34. $6! = 720$
35. 4
36. a) 84
    b) 35
    c) 1
    d) 1
    e) 15
    f) 10
    g) 10
37. a) $S = \{1\}$

    b) $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right\}$

    c) $S = \left\{\frac{2}{3}, 2\right\}$

Capítulo 10 – Análise Combinatória e Binômio de Newton

1. 60 números; 125 números
2. 40 opções
3. 144 maneiras
4. 36 maneiras
5. $10^4 = 10.000$
6. 720 anagramas
7. a) 81 números
   b) 90 números
8. com repetição: 135.200
   sem repetição: 117.000
9. $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15.600$ maneiras distintas
10. 2.652
11. 12
12. a) 42
    b) 420
    c) 209
13. a) $\frac{1}{(n-5)}$
    b) $x - 1$
    c) $n^3 - 3n^2 + 2n$
    d) $\frac{(n^3 + 3n^2 + 2n - 1)}{n}$
14. a) $n = 3$
    b) $n = 6$
    c) $n = 5$
    d) $n = 8$
15. a) $S = \{4\}$
    b) $S = \{7\}$
    c) $S = \{2\}$
    d) $S = \{8\}$
16. a) 720
    b) 6
17. $S = \{6\}$
18. 72
19. a

38. $\binom{11}{4} = 330$

39. 9 40. 16

41. a) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

b) $16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$

c) $1 + 9a + \frac{135}{4}a^2 + \frac{135}{2}a^3 + \frac{1.215}{16}a^4 + \frac{729}{16}a^5$

42. $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

43. c 44. $T_4 = 20$

45. c 46. b

Capítulo 11 – Probabilidade e Estatística

1. a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{1}{52}$ c) $\frac{1}{4}$

2. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{5}{6}$

3. Sérgio: $\frac{1}{5}$; Morgana: $\frac{1}{4}$

4. a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{10}$

5. $\frac{4}{13}$ 6. $\frac{2}{3}$ 7. $\frac{2}{13}$

8. $p(\bar{E}) = \frac{1}{9}$ e $p(E) = \frac{8}{9}$

9. $p(E) = \frac{1}{4}$ e $p(\bar{E}) = \frac{3}{4}$

10. a) $\frac{24}{91}$ b) $\frac{45}{91}$ c) $\frac{67}{91}$

11. $\frac{1}{6^4} = \frac{1}{1.296}$

12. a) $\frac{1}{5}$ ou 20% b) $\frac{3}{14}$

13. $\frac{1}{16}$ 14. $\frac{3}{10} = 30\%$

15. $\frac{2}{5}$

16. a) $\frac{8}{27}$ b) $\frac{16}{27}$

17. $\frac{4.547}{8.192}$

18. a) 0,36015 c) 0,83193
b) 0,1323

19. $\frac{1}{12}$ 20. $\frac{7}{36}$ 21. 45%

22. d 23. $\frac{2}{9}$ 24. d

25. a) 1 b) $\frac{1}{30}$

26. c

27. a) Ma = 5,1; Md = 5 e Mo = 5
b) Ma = 42; Md = 35 e Mo não existe
c) Ma = 4,1; Md = 4 e Mo = 3 e 6
d) Ma = 4,17; Md = 4,5 e Mo = 6

28. a) R$ 17,00 e R$ 153,00 (como são dois, podemos dizer que é bimodal)
b) R$ 85,00
c) R$ 87,12

29. Soma das alternativas corretas 63 (todas)

30. e 31. c

Capítulo 12 – Matemática Financeira

1. 8%

2. 50 homens

3. R$ 84,00

4. a 5. 20%

6. R$ 208.000,00

7. a) 20% b) 16,66%

8. R$ 37.500,00

9. 23% 10. R$ 27,00

11. R$ 400,00 12. c

13. b 14. d 15. b

16. d 17. d

18. x = 5%

19. O preço diminuiu em 4%.

20. a

21. a) Em 15/3 o preço era de R$ 20,00. Em 15/4 o preço era de R$ 31,20.
b) O maior índice de reajuste aconteceu em julho (41,8%).
c) O percentual de redução foi de 5% sobre o preço.

22. 12% ao mês 23. a

24. 540 dias ou 18 meses ou 1 ano e meio

25. 2% ao mês 26. 20 meses

27. b 28. 5 anos

29. R$ 4.207,65

30. a) i = 71,6% b) i = 11,6%

31. Deverá escolher o plano à vista.

32. A segunda opção é mais vantajosa.

33. 20% 34. c 35. b 36. a

Capítulo 13 – Números Complexos

1. a) $S = \left\{\sqrt{5i}\,; -\sqrt{5i}\right\}$
b) S = {−2 + 2i; −2−2i}
c) S = {2 + i; 2 − i}

2. a) −49 c) −2i
b) −9 d) $-\frac{77}{9} + 4i$

3. a) $\frac{7}{2} + 0i$ c) −10 + 0i
b) 0 − 2i d) 0 + 6i
e) 0 + 10i

4. a) Re(z) = 5 e Im(z) = −3
b) Re(z) = 0 e Im(z) = 1
c) Re(z) = 5 e Im(z) = 2
d) Re(z) = $\sqrt{3}$ e Im(z) = 3

5. a) imaginário c) imaginário
b) imaginário puro d) real

6. a) x = −7 b) x = 3

7. y = 5 8. 1 9. c

10. a) −i b) i c) 1 d) −1

11. 1 − i 12. b 13. b

14. a) a = − 2, b = 4
b) a = − 3, b = 9
c) a = 2, b = − 1

15. a) $\overline{Z} = -i$ c) $\overline{Z} = 3 - i$
b) $\overline{Z} = 1 + 2i$ d) $\overline{Z} = -2 - 4i$

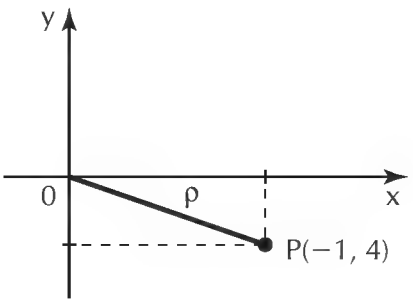
16. a) Z = −1 + 2i
b) Z = 5 − 8i
c) Z = −5 + 8i
d) Z = 9 + 19i
e) Z = −5 − 12i
f) Z = −16 −30i

17. a 18. c 19. b

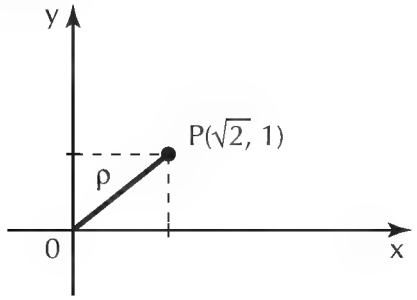
20. a) S = {3i − 1} c) S = {1i, −i}
b) S = {2 + 2i}

21. c 22. 7 23. d 24. e

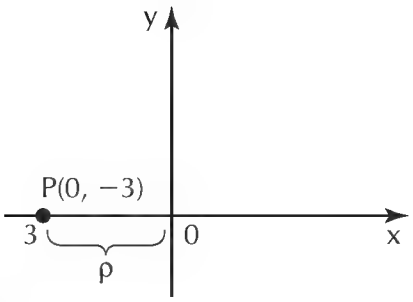
25. a) ρ = $\sqrt{17}$



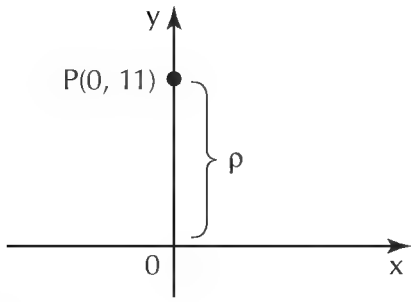
b) $\rho = \sqrt{3}$



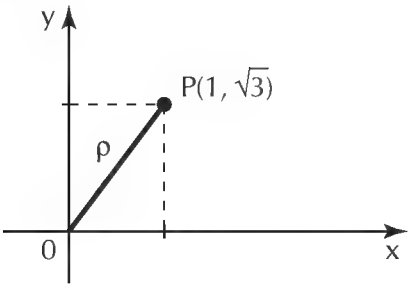
c) $\rho = 3$



d) $\rho = 11$



e) $\rho = 2$



26. 72 27. b 28. 33
29. 26 30. 45

31. a) $z_1 \cdot z_2 = 16i$ b) $\frac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{3} + 2i$

32. a) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 24\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

b) $\frac{(z_2 \cdot z_3)}{z_1} = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

33. a) $|z| = \rho = 4$ e $\theta = 180°$ ou $\theta = \pi$

b) $|z| = \rho = 3$ e $\theta = 270°$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$

c) $|z| = \rho = 2$ e $\theta = 60°$ ou $\theta = \frac{\pi}{3}$

34. a) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$

c) $z = 5(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$

35. a) $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

b) $-2i$

c) $\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

36. c

Capítulo 14 – Polinômios e Equações Polinomiais

1. a) Termos: $x^4, -3x^3, \frac{1}{5}x^2, x, -3$

Coeficientes: $1, -3, \frac{1}{5}, 1, -3$

b) Termos: $\frac{1}{8}x^2, -5x, \sqrt{2}$

Coeficientes: $\frac{1}{8}, -5, \sqrt{2}$

c) Termos: $-x^2, x, 1$

Coeficientes: $-1, 1, 1$

2. a, c, d

3. a) gr(P) = 4
b) gr(Q) = 1
c) gr(R) = 0
d) gr(S) = 2
e) gr(T) = 8
f) gr(U) = 1

4. a) $P(x) = -6x^7 + 0x^6 + 2x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$

b) $Q(x) = \frac{3}{2}x^2 + 0x + 0$

5. Sendo $P(x) = 0$, podemos escrever:
$P(x) = 0x + 0$
$P(x) = 0x^2 + 0x + 0$
$P(x) = 0x^7 + 0x^6 + \ldots + 0$
Logo, não se pode definir o grau de $P(x) = 0$

6. c 7. $m = 4$

8. a) $m = 0$ b) $m \neq 0$

9. $a = -1$ e $b = 1 + i$

10. e 11. 20 12. b 13. a

14. b 15. a 16. 33 17. 11

18. $R(x) = 23$

19. e 20. b

21. a) $P(x) = 5(x - 3)(x - 1)$
b) $P(x) = 2(x - 2)(x - 1)(x + 1)$

22. $S = \{1, -i, i\}$

23. c 24. b 25. 8 26. c

27. a) $P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$
b) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

28. 19 29. e 30. a 31. d

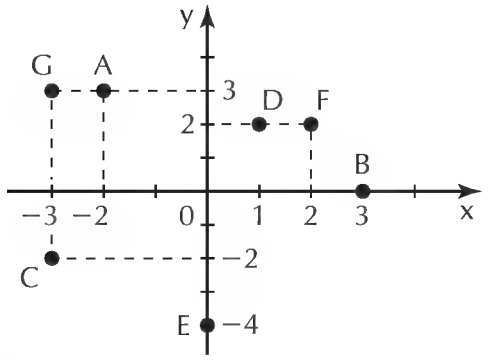
32. $S = \{2, 3, 5\}$

33. e 34. zero 35. zero

Capítulo 15 – Geometria Analítica

1. a) 8 b) 3 c) 5

2.



3. A(3, 4); B(−3, 0); C(0,2); D(5,0); E(0, −5); F(−2, −3)

4. a) m, ou seja, A(m, m)
b) −b, ou seja, B(−b, b)
c) −c, ou seja, C(−c, −c)
d) −n, ou seja, D(n, −n)
e) 0, ou seja, E(e, 0)
f) 0, ou seja, F(0, −f)

5. a) $d(A, B) = 2\sqrt{2}$
b) $d(C, D) = \sqrt{113}$
c) $d(E, F) = \sqrt{5}$

6. 10 7. b 8. c

9. d 10. $x = 8$ 11. e

12. $M_{AB}\left(\frac{7}{2}, 3\right)$, $M_{AC}\left(2, \frac{9}{2}\right)$ e $M_{BC}\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right)$

13. B(4, 5) 14. c

15. $M_{BC}\left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ 16. b

17. a) alinhados c) alinhados
b) não alinhados

18. c 19. 29 20. 24

21. $m = \sqrt{3}$

22. a) $m = 6$
b) O coeficiente angular m não é definido.
c) $m = 0$

23. c 24. d

25. $x - 3y + 7 = 0$

26. c

27. $2x + y + 2 = 0$

28. d

29. a) $x = 5$ b) $y = 5$

30. a) $y = 2x$

b) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

c) $y = -2x + 6$

d) $y = 4x - 5$

e) $y = 4$

31. a) $y = 3x + 12$

b) $y = -\frac{x}{4} - \frac{13}{2}$

31. a) $y = -2x + 6$; $m = -2$ e $b = 6$

b) $y = 4x - 5$; $m = 4$ e $b = -5$

c) $y = 4$; $m = 0$ e $b = 4$ (reta horizontal)

32. a) $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

b) $y = \frac{3x}{7} + \frac{5}{7}$

c) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{10}$

33. a) coeficiente angular $= \frac{5}{2}$

coeficiente linear $= \frac{3}{2}$

b) coeficiente angular $= \frac{1}{4}$

coeficiente linear $= \frac{9}{4}$

c) coeficiente angular $= -7$

coeficiente linear $= 5$

34. a) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$

b) $-\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

c) $-\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 1$

d) $\frac{x}{2} - \frac{y}{7} = 1$

35. a

36. a) $r_1 // r_2$ b) $r_1 \times r_2$ c) $r_1 // r_2$

37. a) $u \neq 4$ e $v \in \mathbb{R}$

b) $u = 4$ e $v \neq 14$

c) $u = 4$ e $v = 4$

38. d 39. b 40. c 41. a

42. $3x + y - 19 = 0$

43. d 44. $p = 18$

45. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ou

$16x^2 + 25g^2 = 400$

46. a

47. $d(Q, t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

48. a 49. 2 50. $2\sqrt{5}$

51. a) $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$

b) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$

c) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 9$

d) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$

e) $x^2 + y^2 = 64$

f) $x^2 + (y + 5)^2 = 8$

g) $(x - 3)^2 + y^2 = 1$

52. a) $O(3, -5)$ e $r = 3$

b) $O(-7, -1)$ e $r = 2$

c) $O(3, 0)$ e $r = 4$

d) $O(0, 1)$ e $r = 10$

e) $O(0, 0)$ e $r = \sqrt{6}$

f) $O(-4, 0)$ e $r = 9$

53. $P(-4, 1) \notin \alpha$ e α passa pela origem.

54. e

55. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

56. $b = -1$ ou $b = 7$

57. $2x + 3y - 10 = 0$

58. b

59. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$

TABELA TRIGONOMÉTRICA

Ângulo	sen	cos	tg	Ângulo	sen	cos	tg
1	0,017452	0,999848	0,017455	23	0,390731	0,920505	0,424475
2	0,034899	0,999391	0,034921	24	0,406737	0,913545	0,445229
3	0,052336	0,99863	0,052408	25	0,422618	0,906308	0,466308
4	0,069756	0,997564	0,069927	26	0,438371	0,898794	0,487733
5	0,087156	0,996195	0,087489	27	0,45399	0,891007	0,509525
6	0,104528	0,994522	0,105104	28	0,469472	0,882948	0,531709
7	0,121869	0,992546	0,122785	29	0,48481	0,87462	0,554309
8	0,139173	0,990268	0,140541	30	0,5	0,866025	0,57735
9	0,156434	0,987688	0,158384	31	0,515038	0,857167	0,600861
10	0,173648	0,984808	0,176327	32	0,529919	0,848048	0,624869
11	0,190809	0,981627	0,19438	33	0,544639	0,838671	0,649408
12	0,207912	0,978148	0,212557	34	0,559193	0,829038	0,674509
13	0,224951	0,97437	0,230868	35	0,573576	0,819152	0,700208
14	0,241922	0,970296	0,249328	36	0,587785	0,809017	0,726543
15	0,258819	0,965926	0,267949	37	0,601815	0,798636	0,753554
16	0,275637	0,961262	0,286745	38	0,615661	0,788011	0,781286
17	0,292372	0,956305	0,305731	39	0,62932	0,777146	0,809784
18	0,309017	0,951057	0,32492	40	0,642788	0,766044	0,8391
19	0,325568	0,945519	0,344328	41	0,656059	0,75471	0,869287
20	0,34202	0,939693	0,36397	42	0,669131	0,743145	0,900404
21	0,358368	0,93358	0,383864	43	0,681998	0,731354	0,932515
22	0,374607	0,927184	0,404026	44	0,694658	0,71934	0,965689

Ângulo	sen	cos	tg
45	0,707107	0,707107	1
46	0,71934	0,694658	1,03553
47	0,731354	0,681998	1,072369
48	0,743145	0,669131	1,110613
49	0,75471	0,656059	1,150368
50	0,766044	0,642788	1,191754
51	0,777146	0,62932	1,234897
52	0,788011	0,615661	1,279942
53	0,798636	0,601815	1,327045
54	0,809017	0,587785	1,376382
55	0,819152	0,573576	1,428148
56	0,829038	0,559193	1,482561
57	0,838671	0,544639	1,539865
58	0,848048	0,529919	1,600335
59	0,857167	0,515038	1,664279
60	0,866025	0,5	1,732051
61	0,87462	0,48481	1,804048
62	0,882948	0,469472	1,880726
63	0,891007	0,45399	1,962611
64	0,898794	0,438371	2,050304
65	0,906308	0,422618	2,144507
66	0,913545	0,406737	2,246037
67	0,920505	0,390731	2,355852
68	0,927184	0,374607	2,475087
69	0,93358	0,358368	2,605089
70	0,939693	0,34202	2,747477
71	0,945519	0,325568	2,904211
72	0,951057	0,309017	3,077684
73	0,956305	0,292372	3,270853
74	0,961262	0,275637	3,487414
75	0,965926	0,258819	3,732051
76	0,970296	0,241922	4,010781
77	0,97437	0,224951	4,331476
78	0,978148	0,207912	4,70463
79	0,981627	0,190809	5,144554
80	0,984808	0,173648	5,671282
81	0,987688	0,156434	6,313752
82	0,990268	0,139173	7,11537
83	0,992546	0,121869	8,144346
84	0,994522	0,104528	9,514364
85	0,996195	0,087156	11,43005
86	0,997564	0,069756	14,30067
87	0,99863	0,052336	19,08114
88	0,999391	0,034899	28,63625
89	0,999848	0,017452	57,28996
90	1	0	–

TABELA DE LOGARITMOS DECIMAIS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	8977	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

BIBLIOGRAFIA

MAGNOLI, Demétrio & ARAUJO, Regina. *Geografia Geral e do Brasil.* 2ª ed. São Paulo. Moderna. 1997.

GASPAR, Alberto. *Física. Mecânica.* 1ª ed. São Paulo. Ática. 2000.

FELTRE, Ricardo. *Química.* Volume 2. 5ª ed. São Paulo. Moderna. 2000.

BOSQUILHA, Gláucia. *Minimanual Compacto de Química – Teoria e Prática.* 1ª ed. São Paulo. Rideel. 1999.

SYMES, R. F. *Aventura Visual, Rochas e Minerais.* São Paulo. Globo.

GOWDAK, Demétrio, MATOS, Neide de. 1ª ed. *Biologia.* Volume único. São Paulo. FTD. 1991.

Revista

Superinteressante, nº 180. São Paulo. Abril. Setembro de 2002.

Sites na Internet:

www.seismo.unr.edu

www.lsi.usp.br

SIGLAS DE VESTIBULARES

Acafe-SC: Associação Catarinense das Fundações Educacionais

Cefet-PR: Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná

Cescea-SP: Centro de Seleção de Candidatos das Escolas de Economia e Administração (São Paulo)

Cescem-SP: Centro de Seleção de Candidatos das Escolas de Medicina (São Paulo)

Cesgranrio-RJ: Fundação Cesgranrio

Enem-MEC: Exame Nacional do Ensino Médio

Faap-SP: Fundação Armando Álvares Penteado

FMU-FIAM-FAAM-SP: Faculdades Metropolitanas Unidas, Faculdades Integradas Alcântara Machado, Faculdade de Artes Alcântara Machado.

FEI-SP: Faculdade de Engenharia Industrial
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular
ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Mackenzie-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie
Osec-SP: Organização Santamarense de Educação e Cultura
PUC-Campinas-SP: Pontifícia Universidade Católica de Campinas
PUC-RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UE de Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira de Santana
UF-Pelotas: Universidade Federal de Pelotas
Ufac: Fundação Universidade Federal do Acre
UFAL: Universidade Federal de Alagoas
UFAM: Universidade Federal do Amazonas
UFBA: Universidade Federal da Bahia
UFC-CE: Universidade Federal do Ceará
UFG-GO: Universidade Federal de Goiás
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS: Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFPA: Universidade Federal do Para
UFPB: Universidade Federal da Paraíba
UFPE: Universidade Federal de Pernambuco
UFPI: Universidade Federal do Piauí
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRR: Universidade Federal de Roraima
UFRRJ: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFSE: Universidade Federal do Sergipe
UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina
Vunesp: Fundação para o Vestibular da Unesp